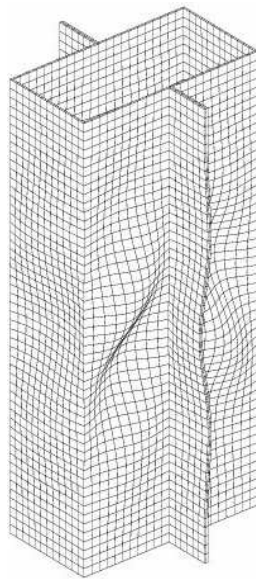


MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS



MEF

HERVÉ OUDIN

Plan du polycopié

INTRODUCTION.....	1
I-1 LA MEF ET L'INDUSTRIE.....	1
I-2 PROCESSUS D'ANALYSE & APPROXIMATION	2
LES TREILLIS	5
II-1 CALCUL D'UN TREILLIS	5
II-1.1 Analyse du problème	6
II-1.2 Calcul de la matrice raideur.....	7
II-1.3 Résolution.....	8
II-1.4 Post-traitement	8
II-1.5 Remarques	9
II-2 LA THÉORIE	9
II-2.1 Modèle barre en traction – compression.....	9
II-2.2 Mise en équations par le PFD.....	10
II-2.3 Mise en équations par le PTV.....	11
II-2.4 Équivalence des principes	11
II-2.5 L'élément fini barre	12
II-2.6 Application aux treillis 2D	14
II-3 L'ERREUR D'APPROXIMATION	16
II-3.1 Modèle à 1 élément.....	16
II-3.2 Modèle à 2 puis 3 éléments.....	18
II-3.3 Modèle à 1 élément de degré 2	20
II-4 PETIT QUIZ	25
NOTES PERSONNELLES	26
LES PORTIQUES.....	27
III-1 LA THÉORIE	27
III-1.1 Modèle poutre en flexion.....	27
III-1.2 Mise en équations.....	28
III-2 L'ÉLÉMENT FINI POUTRE	30
III-2.1 Approximation nodale	30
III-2.2 Matrice raideur et masse.....	31
III-2.3 Vecteur force généralisé.....	32
III-3 APPLICATION AUX PORTIQUES	33
III-4 PETIT QUIZ	37
NOTES PERSONNELLES	38
FORMULATION INTÉGRALE.....	39
IV-1 INTRODUCTION	39
IV-2 RÉSIDUS PONDÉRÉS	41
IV-2.1 Formulation forte	41
IV-2.2 Transformation de la forme intégrale.....	43
IV-3 FORMULATION VARIATIONNELLE EN MÉCANIQUE	46
IV-3.1 Formulation intégrale	46
IV-3.2 Équivalence avec le PTV.....	48
IV-3.3 Écriture matricielle du PTV	48
IV-3.4 Applications à quatre modèles de l'ingénieur	50
IV-4 PETIT QUIZ	55
NOTES PERSONNELLES	56

LES ÉLÉMENTS FINIS	57
V-1 DISCRÉTISATION DU MILIEU	57
V-1.1 <i>Discrétisation géométrique</i>	57
V-1.2 <i>Approximation nodale</i>	58
V-2 CALCUL DES MATRICES ÉLÉMENTAIRES	63
V-2.1 <i>Formulation en mécanique des structures</i>	63
V-2.2 <i>Application l'élément « T3 » axisymétrique</i>	64
V-2.3 <i>Techniques de calcul au niveau élémentaire</i>	65
V-2.4 <i>Application le « T3 » en élasticité plane</i>	70
V-3 ASSEMBLAGE ET CONDITIONS AUX LIMITES	72
V-4 APPLICATION AU PROBLÈME D'ÉCOULEMENT STATIONNAIRE	73
V-5 PETIT QUIZ	77
NOTES PERSONNELLES	78
UTILISATION D'UN LOGICIEL ÉLÉMENTS FINIS.....	79
VI-1 DÉROULEMENT D'UNE ÉTUDE	79
VI-1.1 <i>Analyse du problème:</i>	79
VI-1.2 <i>Création et vérification des données:</i>	80
VI-1.3 <i>Exécution du calcul:</i>	81
VI-1.4 <i>Exploitation des résultats:</i>	81
VI-2 ORGANIGRAMME D'UN LOGICIEL ÉLÉMENTS FINIS	82
VI-2 PETIT QUIZ	84
NOTES PERSONNELLES	85

Introduction

I-1 La MEF et l'industrie

Quelle place occupe le calcul dans l'industrie ?

Quels sont les principaux champs d'application du calcul ?

Répondre à ces questions dépasse le cadre de la méthode des éléments finis. Ce n'est qu'une méthode parmi d'autres qui permettent à l'ingénieur d'effectuer des simulations numériques de phénomènes physiques.

Le calcul occupe une place stratégique avec la CAO et les autres technologies de simulation (essais) dans le développement d'un produit complexe qui touche à différents domaines de la physique. Cela concerne les industries automobiles, navales, aéronautiques, ferroviaires, mais aussi les industries lourdes: centrales électriques, plates-formes pétrolières, et le génie civil. Le calcul est indispensable lorsque l'on cherche à obtenir une solution optimisée pour réduire les coûts et les délais de fabrication. Grâce au calcul l'ingénieur peut tester plusieurs configurations pour optimiser le comportement d'un modèle à une prestation donnée. Cela évite de multiplier les prototypes et les essais tests réels, les supports physiques ne servent plus à chercher une solution, ils permettent de la valider. Attention, même précis un modèle ne fournit jamais qu'une approximation de la réalité, il est donc impossible de se passer des prototypes.

Le calcul s'applique aussi dans les domaines du « process ». Les procédés de fabrication tels que l'emboutissage, l'usinage grande vitesse, les dépôts de peinture, l'assemblage de tôlerie, la mise en forme des plastiques, peuvent être modélisés par éléments finis. Ici c'est une bonne représentation du comportement du phénomène physique qui sera recherchée pour pouvoir vérifier et valider un procédé de fabrication d'une pièce.

Enfin le calcul de conception dans les bureaux d'études, c'est sans doute le plus répandu car grâce aux outils de calcul simplifié dont disposent les logiciels de CAO modernes, la simulation numérique fait partie des outils de conception pour obtenir un comportement défini à priori qui détermine le dimensionnement, donc le dessin, des pièces mécaniques.

La méthode des éléments finis est de toutes les méthodes de discrétisation la plus utilisée car :
Elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe,
Elle couvre de nombreux domaines de la physique,
Les moyens informatiques actuels (puissance des calculateurs, outils de visualisation) la rendent facile de mise en œuvre,
De nombreux logiciels généraux ou dédiés sont disponibles sur le marché.

I-2 Processus d'analyse & approximation

Si l'utilisation de la méthode se démocratise de par la simplicité croissante de mise en oeuvre, la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode, il reste néanmoins des questions essentielles auxquelles l'ingénieur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par éléments finis dans de bonnes conditions.

Il lui faudra :

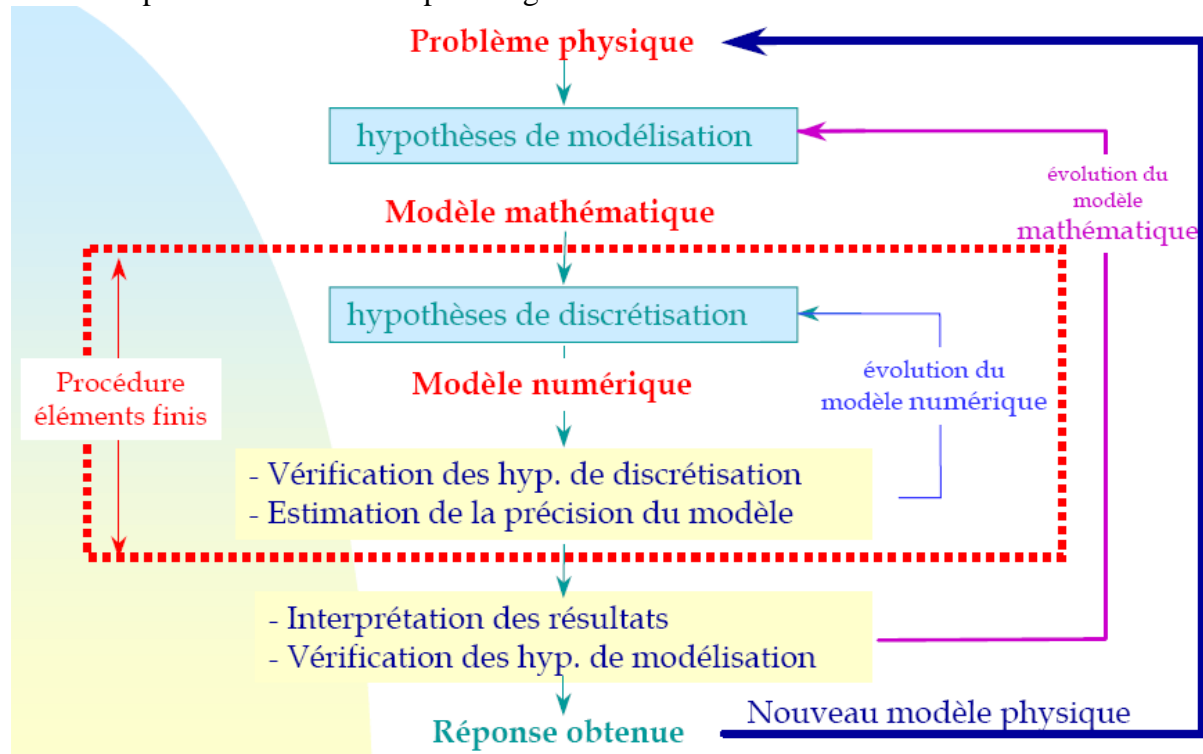
Formaliser les non dits et les réflexions qui justifient les choix explicites ou implicites de son analyse du problème (définition de son modèle),

Évaluer la confiance qu'il accorde aux résultats produits,

Analyser les conséquences de ces résultats par rapport aux objectifs visés.

Ne perdez jamais de vue que l'analyse des résultats nécessite une bonne compréhension des différentes étapes mathématiques utilisées lors de l'approximation, pour pouvoir estimer l'erreur du modèle numérique par rapport à la solution exacte du problème mathématique. N'oubliez pas non plus que le modèle numérique ne peut fournir que des résultats relatifs aux informations contenues dans le modèle mathématique qui découle des hypothèses de modélisation.

De façon générale, les différentes étapes d'analyse d'un problème physique s'organisent suivant le processus schématisé par la figure suivante.

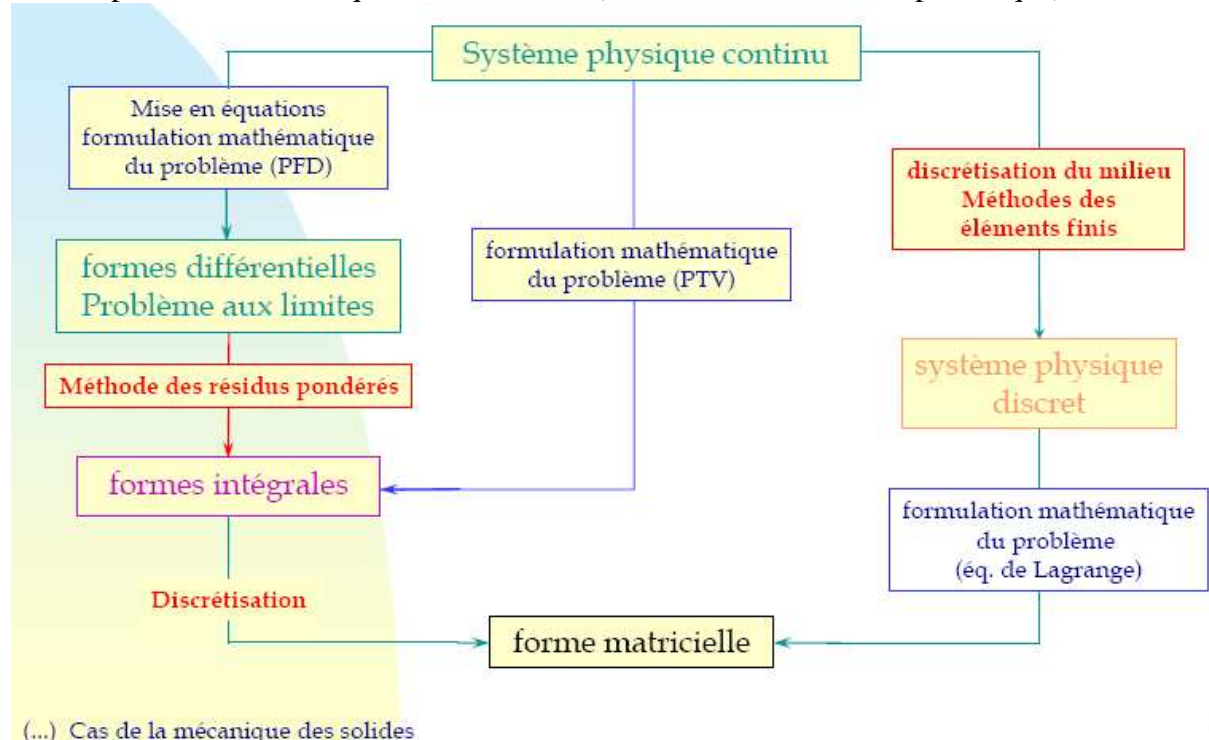


Nous partons d'un problème physique. Le cadre précis de l'étude est défini par les hypothèses simplificatrices « hypothèses de modélisation » qui permettent de définir un modèle mathématique. La difficulté pour l'ingénieur est de savoir choisir parmi les lois de la physique celles dont les équations traduiront avec la précision voulue la réalité du problème physique. Le choix du modèle mathématique est un compromis entre le problème posé à l'ingénieur

"quelles grandeurs veut-on calculer et avec quelle précision?" et les moyens disponibles pour y répondre. Un bon choix doit donner une réponse acceptable pour des efforts de mise en oeuvre non prohibitifs.

Si le modèle mathématique n'admet pas de solution analytique, il faut chercher une solution approchée de ce modèle. La discrétisation du problème « hypothèses de discrétisation » correspond au choix d'un modèle numérique permettant de traiter les équations mathématiques. Il est important de savoir distinguer et hiérarchiser ces deux niveaux d'hypothèses utilisés pour modéliser un phénomène physique.

La figure suivante permet de distinguer les différentes méthodes en fonction de la démarche utilisée pour obtenir une équation matricielle (cette classification n'est pas unique).



Toutes les méthodes d'approximation ont un même objectif, remplacer un problème mathématique défini sur un milieu continu (équations différentielles ou intégrales) par un problème mathématique discret (équation matricielle), problème de dimension finie que l'on sait résoudre numériquement.

En résumé, les questions essentielles auxquelles l'ingénieur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par un modèle numérique dans de bonnes conditions, sont :

- Quel modèle mathématique utiliser ?
- Quel modèle numérique faut-il lui associer ?
- Quelle est l'erreur d'approximation commise ?
- Peut-on améliorer le modèle numérique ?
- Faut-il changer le modèle mathématique ?

Les équations du modèle retenu, sont soumises à un certain nombre d'hypothèses basées sur les sciences de l'ingénieur. Il faut connaître le domaine de validité de ces hypothèses pour pouvoir vérifier que la solution obtenue est satisfaisante. La solution exacte d'un modèle mathématique qui ne correspond pas à la réalité physique ne vaut rien.

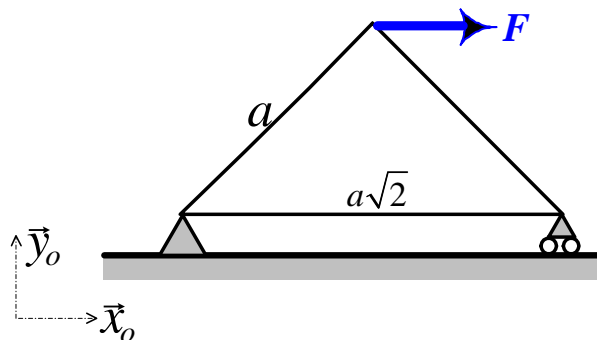
Les treillis

L'objectif de ce chapitre est d'appréhender de façon pragmatique la méthode des éléments finis, à partir du calcul de la réponse statique d'un treillis plan. Ce qui nous permet d'introduire les principales étapes de construction du modèle sur un exemple simple.

Pour comprendre cette modélisation, nous rappelons les notions théoriques relatives au modèle de traction et nous présentons l'approximation « élément fini barre ». Le calcul d'une colonne sous son poids propre illustre ensuite la notion d'erreur d'approximation et nous permet d'envisager deux améliorations du modèle numérique, le raffinement de maillage ou l'utilisation d'un élément d'ordre supérieur.

II-1 Calcul d'un treillis

Intéressons-nous à la réponse statique du treillis plan représenté par la figure ci-dessous.



Ce treillis est un assemblage (par rotules) d'éléments travaillant en traction – compression. La géométrie, les caractéristiques mécaniques, les conditions aux limites et le chargement sont donnés.

La démarche suivie est la suivante

- Analyse du problème → discrétisation et définition des inconnues
- Calcul de la matrice raideur → équation matricielle à résoudre
- Résolution → déformée de la structure et efforts aux appuis
- Post-traitement → contraintes dans les barres et efforts aux nœuds.

[Le premier diaporama du site présente ces étapes du modèle éléments finis](#)

II-1.1 Analyse du problème

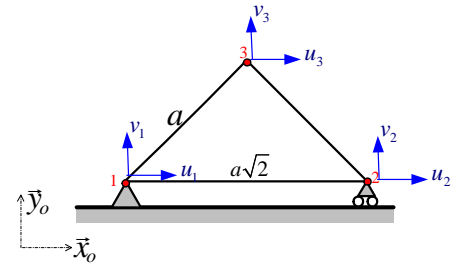
Le problème posé est plan.

Nous avons 3 nœuds à 2 variables par nœuds (u_i, v_i) les déplacements du nœud dans le plan.

→ Modèle à 6 degrés de liberté

$$\{U\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\}$$

vecteur des déplacements nodaux



Les conditions aux limites :

Appui au nœud 1 : $\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases}$ fait apparaître deux composantes d'effort inconnu : $\begin{cases} X_1 \\ Y_1 \end{cases}$

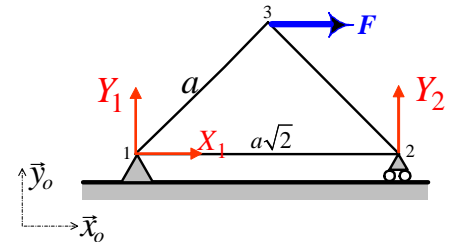
Appui glissant au nœud 2 : $v_2 = 0$ fait apparaître une composante d'effort inconnu : Y_2

Le travail virtuel* des efforts donnés et inconnus appliqués à la structure conduit à l'expression du **vecteur des forces nodaux** :

$$\{F\}^T = \{X_1 \quad Y_1 \quad 0 \quad Y_2 \quad F \quad 0\}$$

Pour un vecteur des déplacements nodaux inconnus :

$$\{U\}^T = \{0 \quad 0 \quad u_2 \quad 0 \quad u_3 \quad v_3\}$$



Efforts nodaux *donnés* et *inconnus*

Nous avons donc 6 inconnues pour 6 équations obtenues en écrivant le principe des travaux virtuels (équations de Lagrange) correspondant aux 6 degrés de liberté initiaux de notre structure.

Pour calculer le travail virtuel des efforts intérieurs (contraintes) nous utilisons la notion d'énergie de déformation que nous rappelons dans le paragraphe suivant.

Nous avons :

$$\delta W_{\text{int}} = - \sum_i \frac{\partial E_d}{\partial q_i} \delta q_i \quad \text{avec} \quad 2E_d = U^T [K] U$$

Les équations de Lagrange à résoudre sont donc de la forme :

$$[K] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ 0 \\ Y_2 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les équations 3, 5, et 6 nous permettent de déterminer le champ de déplacement de la structure (sa déformation).

Les équations 1, 2 et 4 nous donnerons les efforts aux appuis en fonction de ces déplacements.

Calculons la **matrice raideur** $[K]$ de cette structure.

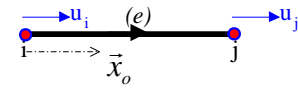
* $\delta T_{\text{ext}} = X_1 \delta u_1 + Y_1 \delta v_1 + Y_2 \delta v_2 + F \delta u_3 = \{\delta U\}^T \{F\}$

II-1.2 Calcul de la matrice raideur

Utilisons les résultats du cours*, pour un élément (i,j) de longueur ℓ_e

En 1D

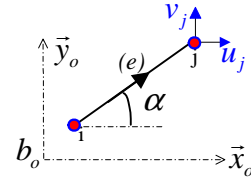
$$[K_e] = \frac{ES}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ sur } \langle u_i \quad u_j \rangle$$



En 2D

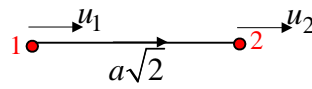
$$[K_e] = \frac{ES}{\ell_e} \begin{bmatrix} [A] & -[A] \\ -[A] & [A] \end{bmatrix} \text{ avec } [A] = \begin{bmatrix} C_\alpha^2 & C_\alpha S_\alpha \\ C_\alpha S_\alpha & S_\alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{sur } \langle u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \rangle$$

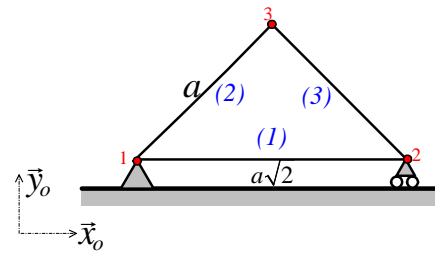


Notre structure est composée de trois éléments

Pour l'élément 1 (1,2)



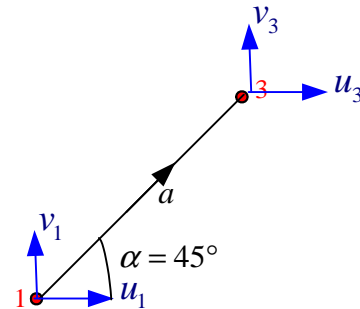
$$\Rightarrow K_1 = \frac{ES}{a\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ sur } \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$



Pour l'élément 2 (1,3)

$$\Rightarrow K_2 = \frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

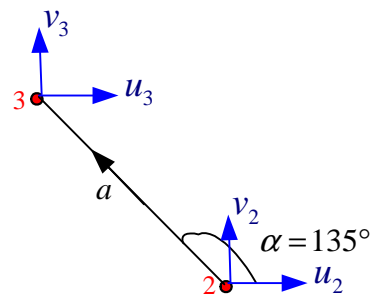
$$\text{sur } \{u_1 \quad v_1 \quad u_3 \quad v_3\}$$



Pour l'élément 3 (2,3)

$$\Rightarrow K_3 = \frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{sur } \{u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\}$$



L'énergie de déformation totale de la structure est la somme des énergies de déformation de chaque élément, **l'assemblage des matrices** consiste à ranger chaque terme dans une matrice globale définie sur le vecteur $\{U\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\}$.

D'où la matrice globale

* Tous ces résultats sont démontrés dans le paragraphe suivant

$$[K] = \frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1+\sqrt{2} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1+1 & 1-1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1-1 & 1+1 \end{bmatrix}$$

les termes de
la matrice K_1 sont en bleu
la matrice K_2 sont en rouge
la matrice K_3 sont en vert

II-1.3 Résolution

L'équation matricielle $[K]\{U\} = \{F\}$ à résoudre est la suivante :

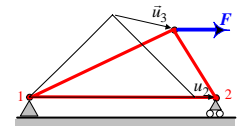
$$\frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1+\sqrt{2} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ 0 \\ Y_2 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les 3 équations donnant les
déplacements nodaux sont
en bleu
Celles permettant de
calculer les efforts sont en
rouge

Le système réduit

$$\frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{F}{ES} \frac{a}{\sqrt{2}} \\ u_3 = \frac{F}{ES} a \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \\ v_3 = -\frac{F}{ES} \frac{a}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

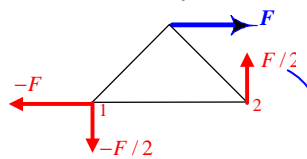
Allure de la déformée



Nous pouvons alors calculer les efforts aux appuis

$$\begin{cases} X_1 = \frac{ES}{2a} (-\sqrt{2} u_2 - (u_3 + v_3)) \\ Y_1 = -\frac{ES}{2a} (u_3 + v_3) \\ Y_2 = \frac{ES}{2a} (-u_2 + u_3 - v_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -F \\ Y_1 = -F/2 \\ Y_2 = +F/2 \end{cases}$$

L'équilibre global de la
structure est vérifié



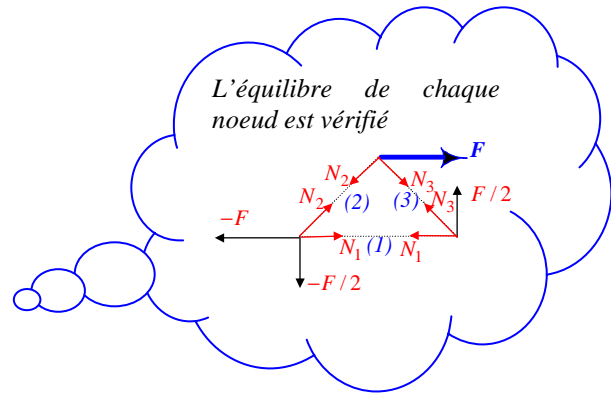
II-1.4 Post-traitement

Pour calculer la contrainte dans les éléments, nous utilisons les résultats de cours suivants :

En 1D : $N_e = \frac{ES}{\ell_e} (u_j - u_i)$

En 2D : $N_e = \frac{ES}{\ell_e} < C_\alpha \quad S_\alpha > \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix}$

$$\text{D'où } \begin{cases} N_1 = \frac{ES}{a\sqrt{2}}(u_2) = F/2 \\ N_2 = \frac{ES}{a\sqrt{2}}(u_3 + v_3) = F/\sqrt{2} \\ N_3 = -\frac{ES}{a\sqrt{2}}(u_3 - u_2 - v_3) = -F/\sqrt{2} \end{cases}$$



II-1.5 Remarques

Tous les calculs sont systématiques et la démarche suivie sera toujours la même en statique.

- ➔ Facilité de programmation de ce type de solution
- ➔ Seule l'analyse, du problème et des résultats, reste à la charge de l'ingénieur.

La matrice raideur du système réduit était inversible « $\det(K) \neq 0$ » car les conditions aux limites en déplacement bloquaient tous les modes rigides de la structure.

- ➔ Problème statique bien posé

Les efforts calculés aux appuis équilibrent parfaitement le chargement.

- ➔ Les résidus d'équilibre sont nuls, car nous travaillons sur la solution analytique de l'équation matricielle. Dans le cas d'une résolution numérique ces résidus doivent tendre vers zéro (erreur numérique).

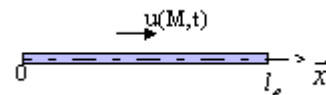
Les contraintes calculées sur les éléments équilibrent de façon exacte (aux résidus près) les charges nodales. Ceci est vrai dans ce cas particulier « calcul statique d'un treillis chargé aux nœuds » car l'approximation utilisée représente le champ exact de la solution analytique « effort normal constant dans chaque élément de la structure ».

- ➔ Erreur de discrétisation qui est nulle

En post – traitement il est possible d'isoler un à un chaque élément de la structure pour écrire l'équation matricielle de l'équilibre de l'élément. Ce calcul permet de déterminer les efforts internes aux nœuds de la structure

II-2 La théorie

II-2.1 Modèle barre en traction – compression



Une barre est un élément mécanique qui ne travaille qu'en traction compression, le modèle mathématique est basé sur les hypothèses suivantes*.

- * *Petits déplacements.*

Section droite reste droite

$$\vec{u}(M, t) = u(x, t) \vec{x}_o$$

- * *Petites déformations.*

$$\epsilon_{xx} = u_{,x}^{**}$$

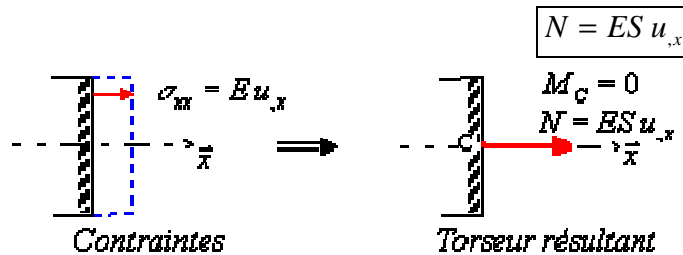
* Cours de résistance des matériaux

** Nous utilisons la notation $\frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x}$

- * Milieu isotope homogène élastique
État de contrainte uni axial

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$$

En intégrant les contraintes sur la section nous obtenons la **loi de comportement intégrée** des barres.



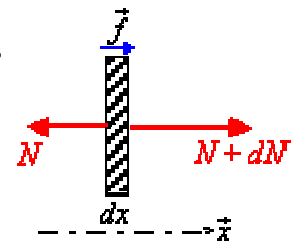
Le calcul du moment résultant donne 0 au centre de la section

II-2.2 Mise en équations par le PFD

Isolons une tranche d'épaisseur dx , et effectuons le bilan des efforts extérieurs sur cet élément de matière (figure ci-contre)

L'équation de résultante dynamique est :

$$N + dN - N + f dx = \rho S dx \ddot{u}$$

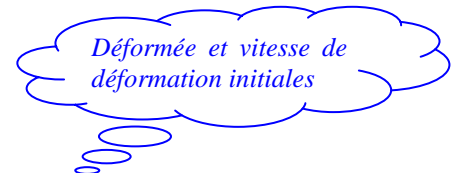


Utilisons alors la loi de comportement intégrée, pour obtenir l'équation locale :

$$\forall x \in]0, \ell[\quad \rho S \ddot{u} - (ES u_{,x})_{,x} = f$$

Les conditions aux limites sont de deux types

- déplacement imposé : $u = u_d(t)$
- force imposée : $ES u_{,x} = N_d(t)$



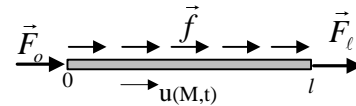
En dynamique il faudra donner les deux conditions initiales $\begin{cases} u(x, 0) = u_o(x) \\ \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_o(x) \end{cases}$

Le PFD appliqué au modèle de traction –compression donne le **système d'équations aux dérivées partielles (EDP)** suivant :

$$\begin{cases} \text{équation locale : } \forall x \in]0, \ell[\quad \rho S \ddot{u} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \\ 2 \text{ conditions aux limites en } x = 0 \text{ et en } x = \ell \\ 2 \text{ conditions initiales : } \begin{cases} u(x, 0) = u_o(x) \\ \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_o(x) \end{cases} \end{cases}$$

II-2.3 Mise en équations par le PTV

Considérons un élément de structure de longueur ℓ , chargé sur sa longueur et à ses extrémités (figure ci-contre).



Le PTV appliqué à cet élément donne l'équation intégrale suivante :

$$\forall \delta u \quad \int_0^\ell \rho S \ddot{u} \delta u \, dx = - \int_0^\ell E S u_{,x} \delta u_{,x} \, dx + \int_0^\ell f \delta u \, dx + F_o \delta u_o + F_l \delta u_l$$

C'est la **forme variationnelle du problème**.

Le premier terme correspond au travail virtuel des quantités d'accélération

Le second terme correspond au travail virtuel des efforts intérieurs (efforts de cohésion)

$$- \int_{\mathcal{D}} \bar{\sigma} : \delta \bar{\epsilon} \, dV = - \int_0^\ell \int_S \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} \, dS \, dx = - \int_0^\ell E S \epsilon_{xx} \delta \epsilon_{xx} \, dx \quad \text{avec} \quad \epsilon_{xx} = u_{,x}$$

Notez que ce terme peut être calculé à partir de la variation de l'énergie de déformation $-\delta E_d$

$$\text{avec} \quad 2E_d = \int_{\mathcal{D}} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon} \, dV = \int_0^\ell E S (u_{,x})^2 \, dx$$

Le troisième terme correspond au travail virtuel du chargement volumique (champ de force)

Le dernier terme correspond au travail virtuel des efforts appliqués aux extrémités du barreau. Dans le cas où la condition aux limites porte sur le déplacement, l'effort à l'extrémité est alors une inconnue du problème.

II-2.4 Équivalence des principes

Partons du PFD et utilisons la méthode des résidus pondérés* (méthode de Galerkin) pour retrouver le PTV.

Écrire $\rho S \ddot{u} - E S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f = 0 \quad \forall x \in]0, \ell[$

est équivalent à $\int_0^\ell P \left(\rho S \ddot{u} - E S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f \right) dx = 0 \quad \forall P$

*P est une fonction test,
dite fonction de
pondération*

Remarque : si u est une solution approchée du problème la forme intégrale représente le **résidu pondéré de l'équation locale sur le domaine**.

en effet le résidu, terme « $\rho S \ddot{u} - E S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f$ » n'est pas nul

Effectuons une intégration par partie du terme en $u_{,xx}$

$$\int_0^\ell P E S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, dx = \left[P E S \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^\ell - \int_0^\ell \frac{\partial P}{\partial x} E S \frac{\partial u}{\partial x} \, dx$$

* Elle sera détaillée dans le chapitre IV sur les méthodes variationnelles.

Nous obtenons

$$\forall P \quad \int_0^\ell P \rho S \ddot{u} dx + \int_0^\ell \frac{\partial P}{\partial x} ES \frac{\partial u}{\partial x} dx = \left[P ES \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^\ell + \int_0^\ell P f dx$$

Pour des conditions aux limites en force aux extrémités en tenant compte de la loi de comportement intégrée, nous avons :

$$F_o = -N(o, t) = -ES \frac{\partial u(o, t)}{\partial x} \quad \text{et} \quad F_\ell = N(\ell, t) = ES \frac{\partial u(\ell, t)}{\partial x}$$

D'où

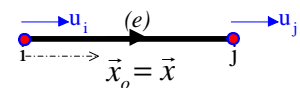
$$\forall P \quad \int_0^\ell P \rho S \ddot{u} dx + \int_0^\ell P_{,x} ES u_{,x} dx = P_\ell F_\ell + P_o F_o + \int_0^\ell P f dx$$

PTV avec
 $P = \delta u$

A titre d'exercice* partez du PTV, effectuez l'intégration par partie du terme de raideur pour retrouver le PFD (équation locale) et les conditions aux limites du problème.

II-2.5 L'élément fini barre

Considérons un élément de longueur ℓ_e , dont les extrémités sont les nœuds i et j. Le repère local, lié à l'élément, a pour direction \vec{x} axe de la barre et est orienté de i vers j.



Les deux variables nodales sont les déplacements des nœuds i et j, notés u_i et u_j

L'approximation polynomiale à deux paramètres correspondante est de la forme

$$u^*(x, t) = a_1 + a_2 x \quad \text{avec } 0 \leq x \leq \ell_e$$

Écriture matricielle d'un polynôme de degré 1 en x dont les coefficients sont les paramètres de l'approximation.

Pour construire l'approximation nodale, nous devons identifier aux nœuds la valeur de l'approximation et les déplacements nodaux.

$$\begin{aligned} \text{Soit} \quad \text{en } x = 0 \quad & u^*(0, t) = u_i(t) = a_1 \\ \text{en } x = \ell_e \quad & u^*(\ell_e, t) = u_j(t) = a_1 + a_2 \ell_e \end{aligned}$$

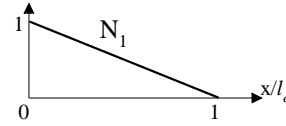
$$\text{Nous en déduisons} \quad \begin{cases} a_1 = u_i \\ a_2 = \frac{u_j - u_i}{\ell_e} \end{cases}$$

$$\text{D'où l'approximation nodale} \quad u^* = \left\langle 1 - \frac{x}{\ell_e}, \frac{x}{\ell_e} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_i(t) \\ u_j(t) \end{Bmatrix} \quad \text{notée : } u^* = \langle N \rangle \{U_e\}$$

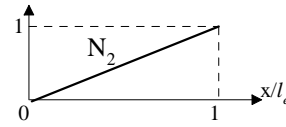
* Nous illustrons cette démarche dans le chapitre suivant sur les portiques.

Les fonctions d'interpolation de l'approximation nodale sont :

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{\ell_e} \quad \text{vérifie} \quad \begin{cases} N_1(i) = 1 \\ N_1(j) = 0 \end{cases}$$



$$N_2(x) = \frac{x}{\ell_e} \quad \text{vérifie} \quad \begin{cases} N_2(i) = 0 \\ N_2(j) = 1 \end{cases}$$



La notion d'approximation nodale est fondamentale dans la méthode des éléments finis, elle permet d'utiliser des variables qui ont un sens physique, et sur lesquelles nous pourrions directement imposer les valeurs données par les conditions aux limites de type cinématique.

Calculons maintenant l'énergie de déformation associée à notre élément.

$$\text{Rappel :} \quad 2E_d = \int_{\mathcal{D}_e} \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} \, dV = \int_0^{\ell_e} ES (u_{,x})^2 \, dx$$

Utilisons l'approximation nodale du champ des déplacements

$$u_{,x} = \langle N_{,x} \rangle \{U_e\} = \left\langle -\frac{1}{\ell_e} \quad \frac{1}{\ell_e} \right\rangle \{U_e\}$$

$$\Rightarrow (u_{,x})^2 = u_{,x}^T \cdot u_{,x} = \{U_e\}^T \langle N_{,x} \rangle^T \langle N_{,x} \rangle \{U_e\} = \{U_e\}^T \frac{1}{\ell_e^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{U_e\}$$

$$\text{D'où} \quad 2E_d = \{U_e\}^T \frac{ES}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{U_e\}$$

Nous en déduisons l'expression analytique de la matrice raideur d'un élément de longueur ℓ_e

$$\boxed{[K_e] = \frac{ES}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

A titre d'exercice calculer la matrice masse correspondant à l'énergie cinétique (ou travail virtuel des quantités d'accélération) de cet élément*.

Pour calculer l'état de contrainte sur les éléments nous utilisons la loi de comportement intégrée :

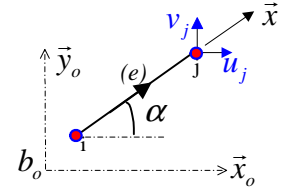
$$\boxed{N = ES \, u_{,x} = ES \langle N_{,x} \rangle \{U_e\} = \frac{ES}{\ell_e} (u_j - u_i) = Cte}$$

* Réponse : $[M_e] = \rho S \ell_e \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$

II-2.6 Application aux treillis 2D

Soit un élément (i,j) formant un angle α avec l'axe \vec{x}_o du repère global (figure ci-contre).

Pour effectuer l'assemblage nous devons exprimer le déplacement axial \bar{u} en fonction de ses composantes sur la base globale (u,v) .



$$\bar{u} = \langle \cos \alpha \quad \sin \alpha \rangle \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \langle C_\alpha \quad S_\alpha \rangle \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Appliquons ce changement de base aux nœuds de l'élément

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\alpha & S_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_\alpha & S_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

Reportons ce changement de base dans l'expression de l'énergie de déformation.

$$2E_d = \{\bar{U}_e\}^T \frac{ES}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{\bar{U}_e\}$$

$$\Rightarrow 2E_d = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_\alpha & S_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_\alpha & S_\alpha \end{bmatrix} \frac{ES}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\alpha & S_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_\alpha & S_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

Nous en déduisons l'expression de la matrice raideur élémentaire sur les variables $\langle u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \rangle$

$$[K_e] = \frac{ES}{\ell_e} \begin{bmatrix} [A] & -[A] \\ -[A] & [A] \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad [A] = \begin{bmatrix} C_\alpha^2 & C_\alpha S_\alpha \\ C_\alpha S_\alpha & S_\alpha^2 \end{bmatrix}$$

De même pour calculer l'état de contrainte

$$N = \frac{ES}{\ell_e} (\bar{u}_j - \bar{u}_i) = \frac{ES}{\ell_e} \langle C_\alpha \quad S_\alpha \rangle \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix}$$

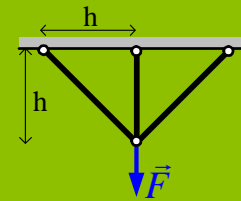
En suivant la démarche proposée dans le paragraphe II-1, ce modèle numérique basée sur la méthode des éléments finis permet de calculer de façon exacte la réponse statique d'un treillis chargé aux nœuds. La solution numérique obtenue est identique à la solution analytique de la résistance des matériaux car dans ce cas particulier l'effort normal est constant sur chaque élément.

Les corrigés des exercices de cours sont disponibles sur le site MEF

Exercice II-1: Étude d'un treillis symétrique de trois barres

Objectifs : Techniques de mise en œuvre de la méthode des éléments finis, changement de base, assemblage, résolution, calcul des efforts, et vérification des équations d'équilibre.

Considérons le treillis de trois barres ci-contre



Modélisation.

Préciser la numérotation de vos éléments et de vos nœuds.

Définissez vos vecteurs globaux :

$\{U\}$ vecteur des déplacements nodaux (u_i, v_i)

$\{F_D\}$ vecteur force généralisé associé aux efforts donnés

$\{F_I\}$ vecteur force généralisé associé aux efforts inconnus

Calcul de la matrice raideur

Exprimer la matrice raideur de chaque élément sur ses variables nodales.

En déduire l'expression de la matrice raideur assemblée complète.

Extraire la matrice raideur réduite.

Résolution statique - Efforts aux appuis

Déterminer la déformée statique, et représenter l'allure de la déformée.

Calculer les efforts aux appuis, et vérifier l'équilibre global de la structure.

Post traitement

Calculer les efforts (contraintes) sur chaque élément, puis vérifier l'équilibre du nœud qui est chargé.

Isoler une des barres à 45° de la structure, et calculer les efforts extérieurs sur cet élément.

Retrouver les résultats précédents.

Utiliser la symétrie

Préciser le nouveau maillage en tenant compte de la symétrie.

Calculer la matrice raideur réduite et retrouver la solution en déplacement.

Si vous avez fait l'exercice 1, celui ci ne devrait pas vous poser de problème.

Exercice II-2: Étude d'un treillis de deux barres

Objectifs : Mise en œuvre de la méthode des éléments finis, assemblage, résolution, post-traitement.

Le treillis ci-contre est constitué de 2 barres de même section réalisée dans un matériau de module d'Young E.

Modélisation.

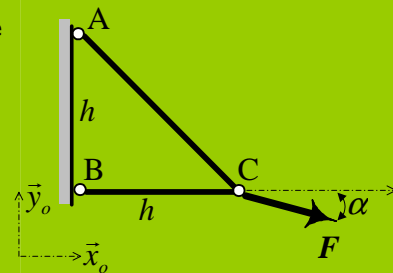
Définissez vos vecteurs globaux : $\{U\}$, $\{F_D\}$, et $\{F_I\}$

Calcul de la matrice raideur

Exprimer les matrices raideur de chaque élément.

En déduire l'expression de la matrice raideur assemblée complète.

Exprimer les 6 équations du modèle.



Résolution statique - Efforts aux appuis

Extraire la matrice raideur réduite, et déterminer la déformée statique.

Calculer les efforts aux appuis, et vérifier l'équilibre global de la structure.

Post traitement

Calculer les efforts (contraintes) sur chaque élément, puis vérifier l'équilibre du nœud qui est chargé.

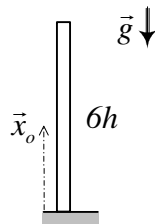
Isoler la barre à 45° de la structure, et calculer les efforts extérieurs sur cet élément.

Retrouver les résultats précédents

II-3 L'erreur d'approximation

Pour présenter la notion d'erreur de discrétisation (erreur liée au maillage) et les améliorations possibles du modèle numérique, nous allons modéliser une colonne soumise à son poids propre.

En effet la solution analytique de ce problème n'est pas linéaire en déplacement.



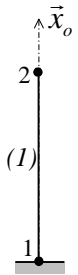
L'effort normal est donné par

$$N = -mg \left(1 - \frac{x}{6h} \right)$$

et le champ de déplacement (après intégration)

$$u = -\frac{mg}{ES} x \left(1 - \frac{x}{12h} \right)$$

II-3.1 Modèle à 1 élément

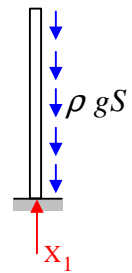


Modèle à 2 degrés de liberté $\{U\}^T = \{u_1 \quad u_2\}$

La condition $u_1 = 0$,

fait apparaître une composante d'effort inconnu X_1

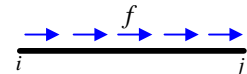
Le travail virtuel du poids propre est $\delta T = \int_0^{6h} -\rho g S \delta u \, dx$



Pour calculer ce travail nous devons utiliser l'approximation nodale.

Théorie

Soit un élément fini chargé par une densité de charge f .

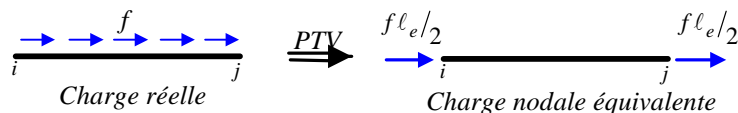


Nous avons : $\delta T = \int_0^{\ell_e} f \delta u \, dx$

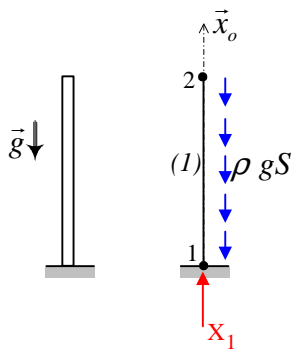
Compte tenu de l'approximation $\delta T = \{\delta U_e\}^T \int_0^{\ell_e} \langle N(x) \rangle^T f \, dx$

Soit pour une charge $f = Cte$ $\delta T = \{\delta U_e\}^T f \left\{ \begin{matrix} \frac{\ell_e}{2} \\ 2 \\ \frac{\ell_e}{2} \end{matrix} \right\}$

Ce calcul permet de calculer les charges nodales équivalentes au sens de l'approximation à une charge volumique réelle appliquée à la structure



Pour notre modèle



$$[K] = [K_1] = \frac{ES}{6h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{F_d\} = -\rho g S \begin{Bmatrix} \frac{6h}{2} \\ \frac{6h}{2} \end{Bmatrix} = -\frac{mg}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

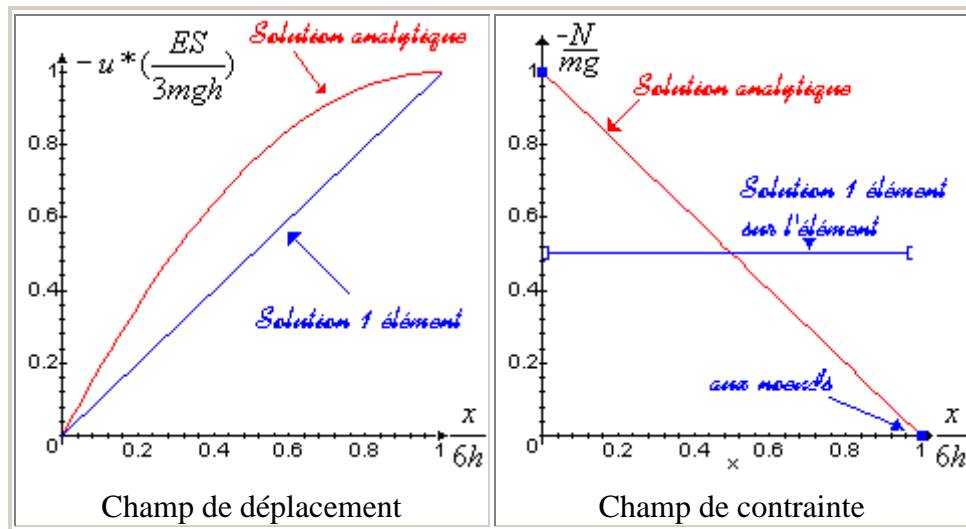
$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

D'où l'équation matricielle à résoudre : $\frac{ES}{6h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -\frac{mg}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Et la solution

- champ de déplacement : $u_2 = -\frac{3mgh}{ES}$ soit $u^* = -\frac{mg}{2ES} x$
- effort à l'encastrement : $X_1 = mg$
- et l'état de contrainte sur l'élément : $N^* = \frac{ES}{6h} u_2 = -\frac{mg}{2}$

Traçons les courbes donnant le champ de déplacement et le champ de contrainte.



La solution éléments finis obtenue aux noeuds est exacte (déplacement et efforts), par contre elle donne une approximation du champ des déplacements et du champ des contraintes sur l'élément. L'erreur sur la contrainte maximale est de 50%, cette modélisation n'est donc pas satisfaisante. Pour l'améliorer nous allons dans un premier temps augmenter le nombre d'éléments.

II-3.2 Modèle à 2 puis 3 éléments

Modèle à 2 éléments

Nous utilisons deux éléments de longueur identique

Pour chaque élément : $[K_e] = \frac{ES}{3h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\{F_d\} = -\frac{mg}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

L'équation matricielle obtenue après assemblage de ce modèle à 3 degré de liberté $\{U\}^T = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}$ est :

$$\frac{ES}{3h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = -\frac{mg}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

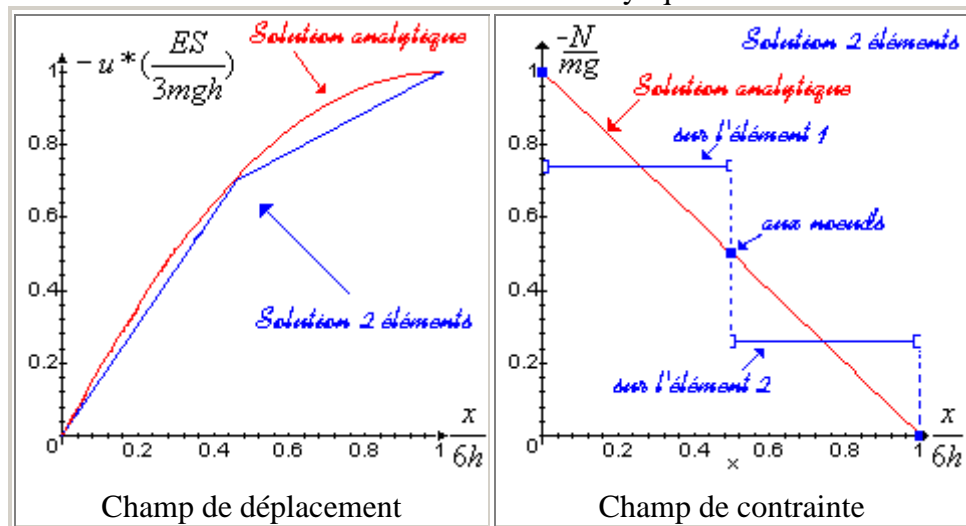
D'où la solution

- Déplacements nodaux : $u_2 = -\frac{9mgh}{4ES}$ et $u_3 = -\frac{3mgh}{ES}$
- Effort à l'encastrement : $X_1 = mg$
- Etat de contrainte sur les éléments : $\begin{cases} N_1^* = \frac{ES}{3h} u_2 = -\frac{3mg}{4} \\ N_2^* = \frac{ES}{3h} (u_3 - u_2) = -\frac{mg}{4} \end{cases}$

Calculons l'effort au noeud interne N°2 en isolant l'élément N°1

$$\frac{ES}{3h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -\frac{mg}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_{21} \end{Bmatrix} \Rightarrow X_{21} = -mg/2$$

Reportons ces résultats sur les courbes de la solution analytique



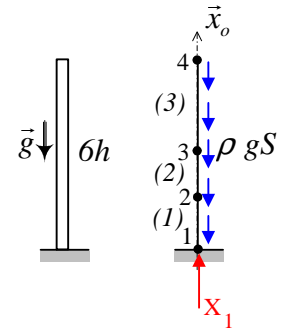
Nous retrouvons les informations exactes (déplacement et efforts) aux nœuds, et une meilleure approximation des champs de déplacements et contraintes sur les éléments. L'erreur sur la contrainte maximale est maintenant de 25%, cette modélisation n'est toujours pas satisfaisante.

Modèle à 3 éléments

Pour affiner le maillage dans la zone la plus contrainte nous utilisons 3 éléments de longueur h , $2h$, et $3h$.

L'équation matricielle obtenue après assemblage de ce modèle à 4 degré de liberté $\{U\}^T = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4\}$ est :

$$\frac{ES}{6h} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = -\frac{mg}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

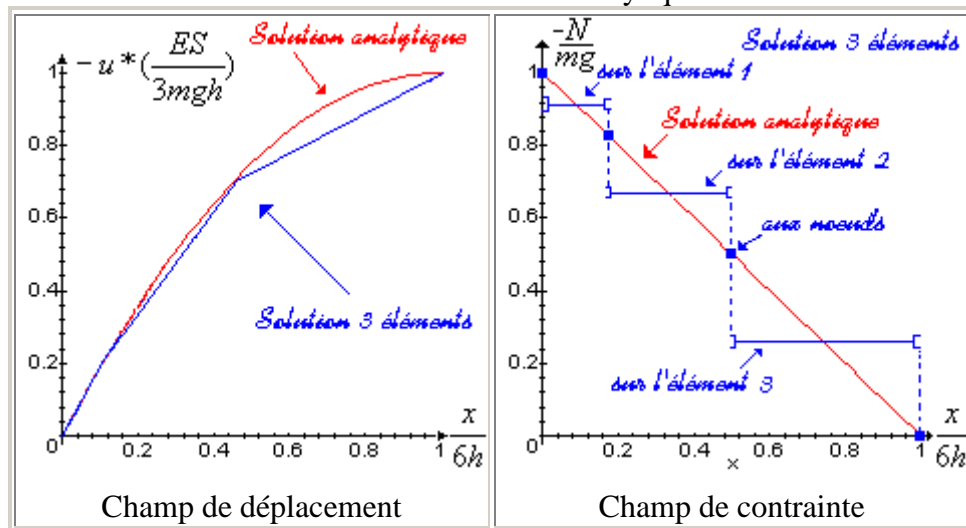


D'où la solution

- Déplacements nodaux : $u_2 = -\frac{11mgh}{12ES}$, $u_3 = -\frac{3mgh}{4ES}$ et $u_4 = -\frac{3mgh}{ES}$
- Effort à l'encastrement : $X_1 = mg$

- Etat de contrainte sur les éléments :
$$\begin{cases} N_1^* = \frac{ES}{h} u_2 = -\frac{11mg}{12} \\ N_2^* = \frac{ES}{2h} (u_3 - u_2) = -\frac{2mg}{3} \\ N_3^* = \frac{ES}{3h} (u_4 - u_3) = -\frac{mg}{4} \end{cases}$$

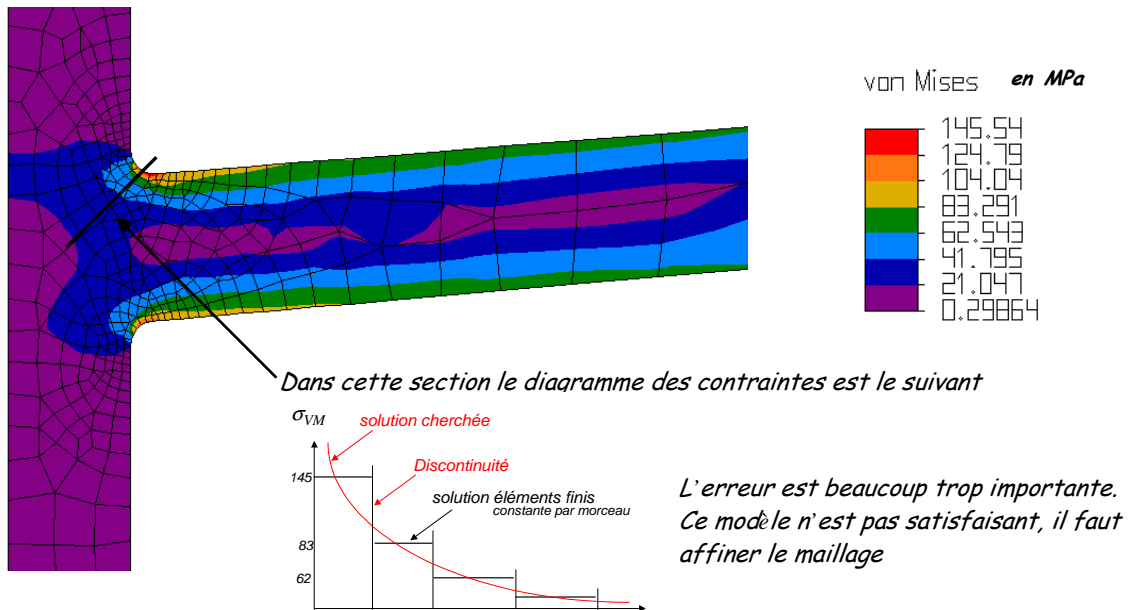
Reportons ces résultats sur les courbes de la solution analytique



L'approximation des champs de déplacements et contraintes sur les éléments est meilleur, erreur de 8% sur la contrainte maximale, on note cependant que la convergence est lente.

Pour améliorer la solution éléments finis nous avons augmenté le nombre d'éléments et densifié le maillage dans la zone la plus chargée. Cette méthode dite « h convergence » demande en général un nombre élevé d'éléments finis.

La figure suivante présente les résultats d'un modèle éléments finis en contraintes planes. Pour quantifier l'erreur relative à cette discrétisation, une démarche identique à celle que nous venons de voir est basée sur l'analyse de la discontinuité du champ des contraintes entre deux éléments adjacents*.

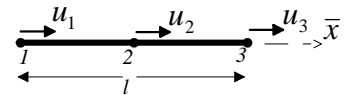


II-3.3 Modèle à 1 élément de degré 2

Dans le problème de la colonne, nous voulons approcher un champ de contrainte qui évolue linéairement. Nous allons donc utiliser une approximation polynomiale du second degré du champ des déplacements.

$$u^*(x, t) = a_1 + a_2x + a_3x^2 = \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{cases}$$

Pour pouvoir identifier les variables de l'approximation nous devons utiliser un élément fini à 3 noeuds



Soit les déplacements nodaux : $\{U_e\}^T = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \rangle$

$$\text{L'identification nous donne } \begin{cases} a_1 = u_1 \\ a_2 = \frac{4}{\ell} \left(-\frac{3}{4}u_1 + u_2 - \frac{1}{4}u_3 \right) \\ a_3 = \frac{4}{\ell^2} \left(\frac{1}{2}u_1 - u_2 + \frac{1}{2}u_3 \right) \end{cases}$$

* Lors de l'initiation à l'utilisation d'un code éléments finis, il sera important de mettre en œuvre les différentes possibilités de visualisation du code pour être capable de quantifier l'erreur de discrétisation.

D'où l'approximation nodale

$$u^* = \langle N \rangle \{U_e\}$$

$$\text{avec } N_1(x) = 1 - \frac{3x}{\ell} + \frac{2x^2}{\ell^2}, \quad N_2(x) = \frac{4x}{\ell} - \frac{4x^2}{\ell^2} \quad \text{et} \quad N_3(x) = -\frac{x}{\ell} + \frac{2x^2}{\ell^2}$$

En reportant cette approximation, dans le calcul de la matrice raideur et du vecteur force généralisé élémentaire,

$$[K_e] = \int_0^\ell \langle N_{,x} \rangle^T ES \langle N_{,x} \rangle dx$$

$$\{F_e\} = \int_0^\ell \langle N \rangle^T f dx$$

nous obtenons, tous calculs faits

$$[K_e] = \frac{ES}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

sur $\langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \rangle$

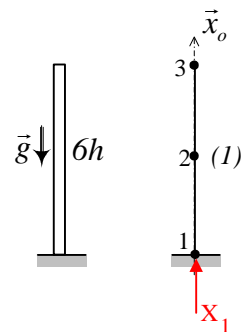
A titre d'exercice calculez le terme (1,3) de cette matrice

$$\{F_e\} = f\ell \begin{Bmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{Bmatrix}$$

Et le premier terme de ce vecteur

En modélisant la colonne avec un élément de degré deux, nous obtenons le système matriciel suivant :

$$\frac{ES}{18h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = -\frac{mg}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



dont la solution est : $u_2 = -\frac{9mgh}{4ES}$ et $u_3 = -\frac{3mgh}{ES}$

D'où

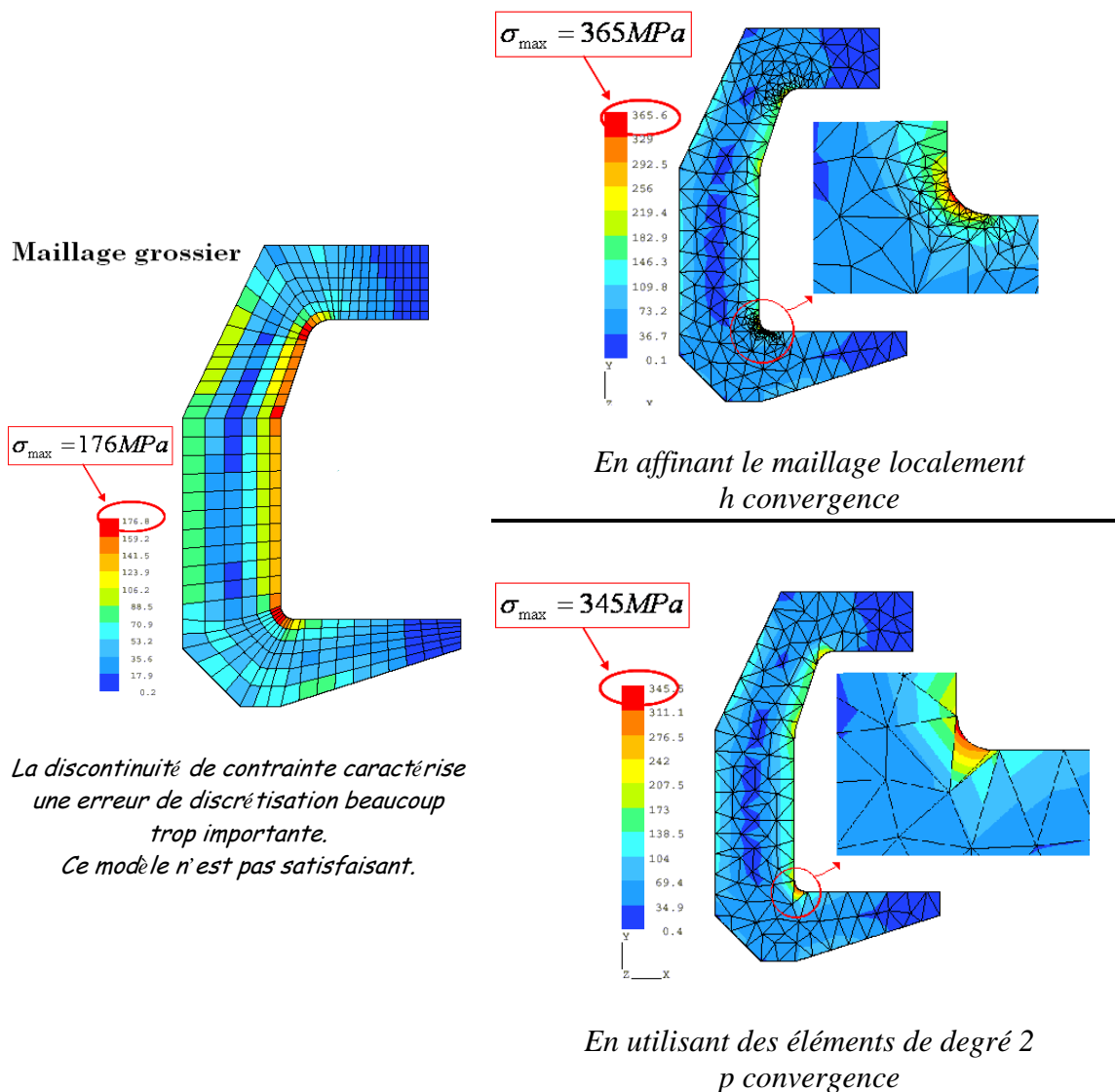
le déplacement approché : $u^* = \left(\frac{4x}{6h} - \frac{4x^2}{(6h)^2} \right) u_2 + \left(-\frac{x}{6h} + \frac{2x^2}{(6h)^2} \right) u_3 = -\frac{mg}{ES} x \left(1 - \frac{x}{12h} \right)$

et l'effort normal : $N^* = \frac{ES}{6h} \left(\left(1 - \frac{2x}{6h} \right) 4u_2 + \left(-1 + \frac{4x}{6h} \right) u_3 \right) = -mg \left(1 - \frac{x}{6h} \right)$

Nous retrouvons la solution analytique qui, dans ce cas particulier, est comme l'approximation un polynôme de degré 2.

Pour améliorer la solution éléments finis nous avons augmenté le degré de l'approximation élémentaire. Cette méthode dite « p convergence » est en général beaucoup plus rapide, elle nécessite moins d'éléments finis.

Les figures suivantes illustrent les deux choix d'améliorations possibles d'un modèle numérique dont l'erreur liée au maillage est beaucoup trop importante.



Ce problème de l'écrase tube est présenté dans le diaporama étai du thème modélisation EF dans le site en ligne

Exercice II-3: Modèle EF pour l'étude des vibrations d'une barre

Objectifs : Étude de convergence de la solution numérique par rapport à la solution analytique ? cet exercice fait le lien avec le cours de vibration..

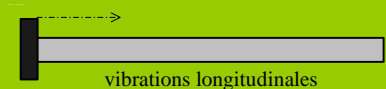
Intéressons-nous à la réponse dynamique de la barre de raideur ES de longueur L représentée par la figure ci-contre

Modèle à un élément fini

Exprimer la matrice raideur et la matrice masse de l'élément.
En déduire une approximation de la première pulsation propre.
Que pensez-vous de ce modèle ?

Modèle à n éléments finis

Pour un maillage de n éléments identiques
Donner la forme des matrices masse et raideur
En déduire une approximation des deux premières pulsations propres.



solution analytique :

$$\omega_i = (2i-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{ES}{\rho SL^2}}$$

$$Z_i(x) = \sin(2i-1) \frac{\pi x}{2L}$$

Que pensez-vous de ce modèle ?

Que faut-il envisager pour améliorer les résultats ?

Utiliser Maple ou Matlab pour calculer les pulsations propres d'un modèle à 3 puis 4 éléments.

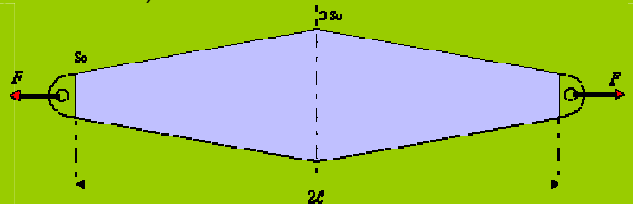
Qu'en concluez-vous sur la convergence des pulsations propres ?

Exercice II-4: Barre à section variable

Objectifs : Calcul de la matrice élémentaire d'une barre à section variable. Comparaison avec la solution analytique, convergence du modèle numérique.

Soit une éprouvette plane (plaque d'épaisseur e) soumise à un essai de traction. Les dimensions de la structure sont données par la figure ci-dessous (la section varie linéairement).

Dans cet exercice nous utiliserons un modèle 1D pour approcher l'état de contrainte dans l'éprouvette. Pour ce modèle, on étudiera la convergence de l'approximation pour une discrétisation du problème en 1 puis 2 éléments finis.



Rappeler l'expression de l'énergie de déformation

pour un élément de section variable de S_1 à S_2

Calculer la matrice raideur élémentaire

Expliquer pourquoi ce type d'élément conduira nécessairement à une approximation.

Application

Soit une modélisation éléments finis de cette structure, peut-on résoudre le système matriciel ?

Combien de conditions aux limites faut-il introduire ?

Proposer une solution.

On décide de tenir compte de la symétrie.

Préciser les conditions aux limites à introduire sur la frontière (figure).

Ces conditions sont-elles suffisantes ?

Proposer une solution.

Pour une modélisation à 1 élément fini en tenant compte de la symétrie.

Calculer les champs approchés des déplacements et des contraintes.

Comparer à la solution analytique, les graphes sont donnés ci-dessous.

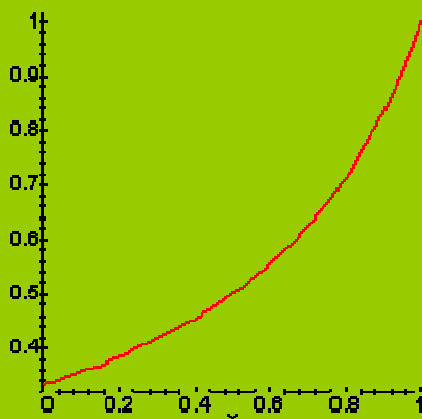
Pour un modèle à 2 éléments finis.

Calculer la nouvelle approximation des champs des déplacements et des contraintes.

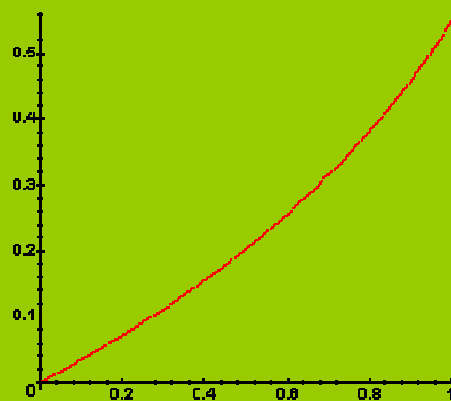
Comparer à la solution analytique.

Le fichier Maple vous permettra de tracer les courbes adimensionnelles de la solution analytique.

Courbe $\frac{\sigma}{F/S_0}$ en fonction de $\frac{x}{l}$



Courbe $\frac{u}{F l / E S_0}$ en fonction de $\frac{x}{l}$



Pour compléter les notions présentées dans ce chapitre le site en ligne

<https://pedagogie.ec-nantes.fr/meefi/>

Vous propose :

- ⇒ **Des diaporamas d'introduction des thèmes du cours**
- ⇒ **Rappel des textes et corrigés des exercices de cours**
- ⇒ **Des exercices d'application** : exercices non corrigés qui vous permettront d'appliquer et de valider les différents thèmes.
- ⇒ **Des QCM d'auto évaluation** : avec correction automatique de vos réponses.
- ⇒ **Un lexique** il contient 3 fiches concernant directement les treillis : les hypothèses du modèle « barre », la mise en équation par le PFD et PTV des barres, et les matrices utiles pour un calcul éléments finis d'un treillis.
- ⇒ **MEFLAB** : C'est une application MATLAB qui vous permettra de réaliser les calculs numériques des structures présentées dans ce cours et en TD. Il faut télécharger les scripts et lire le document de présentation de l'application.

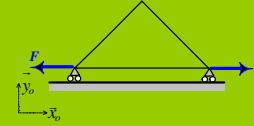
II-4 Petit quiz

Vous devez pouvoir justifier toutes vos réponses

Q1 :

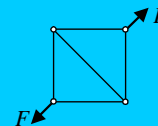
En statique, le modèle éléments finis direct de cette structure est-il mal posé ?

Proposez deux modélisations différentes permettant de calculer cette structure.



Q2 :

Proposez 3 modèles éléments finis de cette structure treillis, (précisez bien les conditions aux limites géométriques, les chargements et les caractéristiques mécaniques de vos modèles, justifier le choix du modèle le plus simple)



Q3 :

Dans les ouvrages sur la méthode des éléments finis vous trouverez l'expression générique suivante pour la matrice raideur

$$[K_e] = \int_{D_e} [B]^T [D] [B] dv$$

Pour un élément barre, que vaut la matrice [B] et que représente-t-elle ?

Même question pour la matrice [D] ?

Q4 :

Pourquoi la solution EF du calcul statique d'un treillis chargé aux nœuds est-elle exacte ?

En est-il de même en dynamique ?

Q5 :

Expliquez pourquoi un changement de base sur la matrice raideur est toujours de la forme

$$[K_e] = [P]^T [K_e] [P]$$

Q6 :

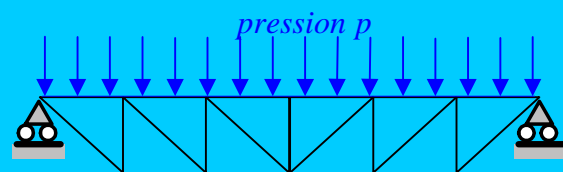
L'élément fini barre classique assure la continuité de quel champ ?

Q7 :

Pour construire un élément fini barre assurant la continuité du champ des déplacements et de l'effort normal, quel type d'approximation doit-on utiliser ? (linéaire, quadratique, cubique)

Q8 :

Soit la structure porteuse représentée par la figure ci-contre, proposez un modèle éléments finis treillis de cette structure (précisez le nombre de variables de votre modèle).



Rien ne vous empêche de discuter vos réponses avec votre enseignant.

Notes personnelles

Les portiques

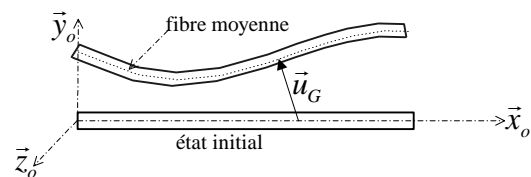
De même que pour les treillis les portiques peuvent être considérés comme des structures constituées d'un nombre fini d'éléments (systèmes discrets).

Ce qui explique que la formulation variationnelle du problème conduite directement au système

III-1 La théorie

III-1.1 Modèle poutre en flexion

Soit un élément rectiligne travaillant en flexion dans le plan $(O, \vec{x}_o, \vec{y}_o)$ supposé principal d'inertie.



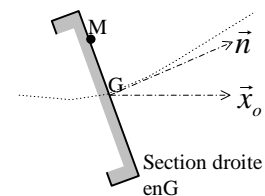
Le modèle mathématique est basé sur les hypothèses suivantes*.

- * *Petits déplacements et section droite reste droite.*
(hypothèses de Bernoulli)

$$\vec{u}(M) = \vec{u}(G) + \vec{\theta} \wedge \vec{GM} \quad \text{et} \quad \vec{\theta} = \text{rot}(\vec{u}(G))$$

soit dans le plan $\vec{\theta} = v_{,x} \vec{z}_o$ et

$$\vec{u}(M, t) = \begin{Bmatrix} -y v_{,x} \\ v \\ 0 \end{Bmatrix}$$



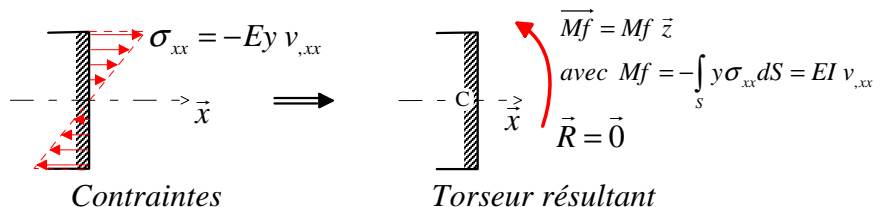
- * *Petites déformations.*

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\text{grad}_s \vec{u}}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\text{grad}_s \vec{u}}} = \begin{bmatrix} -y v_{,xx} & -v_{,x} & 0 \\ v_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = -y v_{,x^2}$$

- * *Milieu isotope homogène élastique*
État de contrainte uni axial

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$$

En intégrant les contraintes sur la section en tenant compte de : $\int_S y dS = 0$ et $I = \int_S y^2 dS$



Nous obtenons la **loi de comportement intégrée** des poutres.

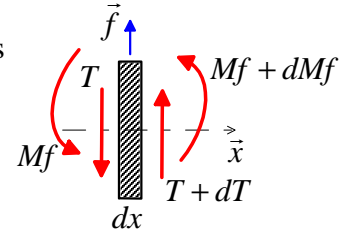
$$M_f = EI v_{,x^2}$$

* Cours de résistance des matériaux - MMC

III-1.2 Mise en équations

par le PFD

Isolons une tranche d'épaisseur dx , et effectuons le bilan des efforts extérieurs sur cet élément de matière (figure ci-contre)



Les équations de résultante et de moment dynamique sont :

$$\begin{cases} T + dT - T + f dx = \rho S \ddot{v} dx \\ (T + dT) \frac{dx}{2} + M_f + dM_f - M_f + T \frac{dx}{2} \equiv 0 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, \ell[\quad \rho S \ddot{v} + M_{f,xx} &= f \\ T &= -M_{f,x} \end{aligned}$$

Utilisons alors la loi de comportement intégrée, pour obtenir l'équation locale :

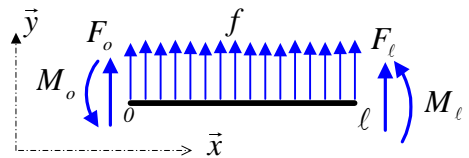
$$\forall x \in]0, \ell[\quad \rho S \ddot{v} + EI v_{,xx} = f$$

Les conditions aux extrémités (*conditions aux limites*) sont de deux types

- conditions en déplacement sur $v = v_d(t)$ ou $\theta = \theta_d(t)$ (conditions en v et $v_{,x}$)
- conditions en force sur $T = T_d(t)$ ou $M_f = M_{f_d}(t)$ (conditions en $v_{,x^3}$ et $v_{,x^2}$)

par le PTV

Considérons un élément de structure de longueur ℓ , chargé sur sa longueur et à ses extrémités (figure ci-contre).



Le PTV appliqué à cet élément donne l'équation intégrale suivante :

$$\forall \delta v \quad \int_0^\ell \rho S \ddot{v} \delta v dx = - \int_0^\ell EI v_{,xx} \delta v_{,xx} dx + \int_0^\ell f \delta v dx + F_o \delta v_o + F_\ell \delta v_\ell + M_o \delta \theta_o + M_\ell \delta \theta_\ell$$

C'est la **forme variationnelle du problème**.

Le premier terme correspond au travail virtuel des quantités d'accélération

Le second terme correspond au travail virtuel des efforts intérieurs (efforts de cohésion)

$$- \int_{\mathcal{D}} \bar{\sigma} : \delta \bar{\varepsilon} dV = - \int_0^\ell \int_S E y v_{,x^2} \delta y v_{,x^2} dS dx = - \int_0^\ell EI v_{,x^2} \delta v_{,x^2} dx$$

Notez que ce terme peut être calculé à partir de la variation de l'énergie de déformation $-\delta E_d$

$$\text{avec } 2E_d = \int_{\mathcal{D}} \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} dV = \int_0^\ell \int_S E (-y v_{,xx})^2 dS dx = \int_0^\ell EI (v_{,xx})^2 dx$$

Le troisième terme correspond au travail virtuel du chargement linéique f

Les derniers termes correspondent au travail virtuel des efforts appliqués aux extrémités du barreau. Dans le cas où les conditions aux limites portent sur un déplacement (*flèche, rotation*), l'effort (*force, moment*) à l'extrémité est alors une inconnue du problème.

Équivalence des principes

Partons du PTV et transformons l'équation intégrale pour retrouver le PFD (équation locale) et les conditions aux limites du problème

Effectuons deux intégrations par partie du terme $\int_0^\ell EI v_{,xx} \delta v_{,xx} dx$

$$\int_0^\ell EI v_{,xx} \delta v_{,xx} dx = \left[\delta v_{,x} EI v_{,x^2} \right]_0^\ell - \int_0^\ell \delta v_{,x} EI v_{,x^3} dx$$

$$\int_0^\ell EI v_{,xx} \delta v_{,xx} dx = \left[\delta v_{,x} EI v_{,x^2} \right]_0^\ell - \left[\delta v EI v_{,x^3} \right]_0^\ell + \int_0^\ell \delta v EI v_{,x^4} dx$$

Fait apparaître les conditions aux limites en rotation et moment

et celles en flèche et force

Reportons dans l'expression du PTV en regroupant les termes

$$\forall \delta v \quad \int_0^\ell \delta v \left(\rho S \ddot{v} + EI v_{,x^4} - f \right) dx = \begin{cases} \delta v_o \left(F - EI v_{,x^3} \right)_o + \delta \theta_o \left(M + EI v_{,x^2} \right)_o \\ \delta v_\ell \left(F + EI v_{,x^3} \right)_\ell + \delta \theta_\ell \left(M - EI v_{,x^3} \right)_\ell \end{cases}$$

Le choix de $\delta v \neq 0$ sur $]0, \ell[$ nous donne l'équation locale : $\rho S \ddot{v} + EI v_{,x^4} - f = 0$

Le choix de $\delta v_o \neq 0$ et $\delta v = 0$ sur $]0, \ell]$, nous donne la condition aux limites en force en $x=0$

$$F_o - \left(EI v_{,x^3} \right)_{x=0} = 0 \Rightarrow F_o = -T_o$$

de la même façon nous retrouvons :

$$\text{pour } (\delta v_{,x})_o \neq 0 \quad M_o = \left(-EI v_{,x^2} \right)_{x=0} = -M_{fo}$$

$$\text{pour } \delta v_\ell \neq 0 \quad F_\ell = \left(-EI v_{,x^3} \right)_{x=\ell} = T_\ell$$

$$\text{pour } (\delta v_{,x})_\ell \neq 0 \quad M_\ell = \left(EI v_{,x^2} \right)_{x=\ell} = M_{f\ell}$$

Ces conditions tiennent compte de l'orientation de la normale extérieure au domaine et de la loi de comportement

III-2 L'élément fini poutre

Pour représenter le comportement d'une poutre en flexion il faut assurer la continuité des champs de déplacement et de rotation.

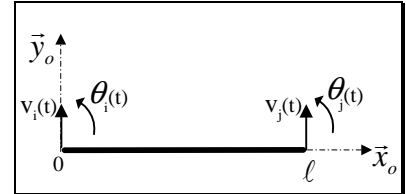
III-2.1 Approximation nodale

L'élément fini « poutre » utilise comme variables nodales la flèche et sa dérivée première (rotation de la section droite), il fait partie de la famille des éléments de type l'Hermite.

Le repère local orthonormé lié à l'élément, a pour direction \vec{x} l'axe de la poutre orienté de i vers j, et pour direction \vec{y} un **vecteur du plan principal d'inertie** de la section droite.

Les variables nodales sont :

$$\langle v_i(t) \quad \theta_i(t) \quad v_j(t) \quad \theta_j(t) \rangle$$



Pour identifier nos quatre variables nodales nous utilisons une approximation polynomiale cubique (degré 3) de la forme :

$$v^*(x,t) = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \rangle \begin{Bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \end{Bmatrix}$$

Par identification des variables nodales avec l'approximation de la flèche et de la rotation aux noeuds, nous obtenons la relation matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} v_i(t) \\ \theta_i(t) \\ v_j(t) \\ \theta_j(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v^*(o,t) \\ \theta^*(o,t) \\ v^*(\ell,t) \\ \theta_j^*(\ell,t) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \end{Bmatrix}$$

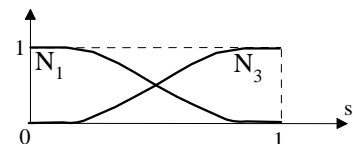
Inversons cette relation et reportons le résultat dans l'expression de l'approximation, nous obtenons

$$v^*(x,t) = \langle N \rangle_e \{U_e\} = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle \begin{Bmatrix} v_i(t) \\ \theta_i(t) \\ v_j(t) \\ \theta_j(t) \end{Bmatrix}$$

Avec les fonctions d'interpolation suivante

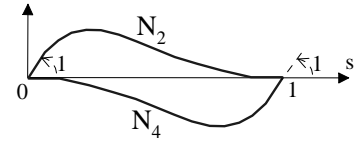
$$\begin{cases} N_1(s) = 1 - 3s^2 + 2s^3 \\ N_3(s) = 3s^2 - 2s^3 \end{cases} \quad \text{où } s = \frac{x}{\ell}$$

N_1 et N_3 représentent la déformée d'une poutre bi - encastree pour laquelle on impose un déplacement unité à une des deux extrémités



$$\begin{cases} N_2(s) = \ell(s - 2s^2 + s^3) \\ N_4(s) = \ell(-s^2 + s^3) \end{cases}$$

N_2 et N_4 représentent la déformée d'une poutre encastrée à une extrémité. Pour laquelle on impose une rotation unité à l'autre extrémité.



III-2.2 Matrice raideur et masse

L'énergie de déformation associée à notre élément est $2E_d = \int_0^{\ell} EI (v_{,xx})^2 dx$

Utilisons l'**approximation nodale** du champ des déplacements

$$v_{,xx} = \langle N_{,xx} \rangle \{U_e\}$$

$$\text{avec } \langle N_{,xx} \rangle = [B] = \left\langle \frac{6}{\ell^2}(-1+2s), \frac{2}{\ell}(-2+3s), \frac{6}{\ell^2}(1-2s), \frac{2}{\ell}(-1+3s) \right\rangle \{U_e\}$$

D'où $[K_e] = \int_0^{\ell} [B]^T EI [B] dx$ soit

$$[K_e] = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \text{ sur } \langle v_i, \theta_i, v_j, \theta_j \rangle$$

A titre d'exercice
calculez le terme (1,2)
de cette matrice.

Remarque : en travaillant sur les variables $\langle v_i, \ell \theta_i, v_j, \ell \theta_j \rangle$ les coefficients de la matrice sont adimensionnels

$$[K_e] = \frac{EI_z}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \text{ sur } \langle v_i, \ell \theta_i, v_j, \ell \theta_j \rangle$$

Cela peut vous permettre de simplifier vos calculs numériques.

La matrice masse de l'élément poutre est

$$[M_e] = \rho S \ell \begin{bmatrix} 13/35 & 11/210 & 9/70 & -13/420 \\ 11/210 & 1/105 & 13/420 & -1/140 \\ 9/70 & 13/420 & 13/35 & -11/210 \\ -13/420 & -1/140 & -11/210 & 1/105 \end{bmatrix} \text{ sur } \langle v_i, \ell \theta_i, v_j, \ell \theta_j \rangle$$

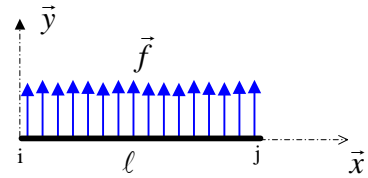
A titre d'exercice
calculez le terme (1,3)
de cette matrice.

III-2.3 Vecteur force généralisé

Soit un élément poutre sur lequel est appliqué une densité linéique d'efforts transversaux f

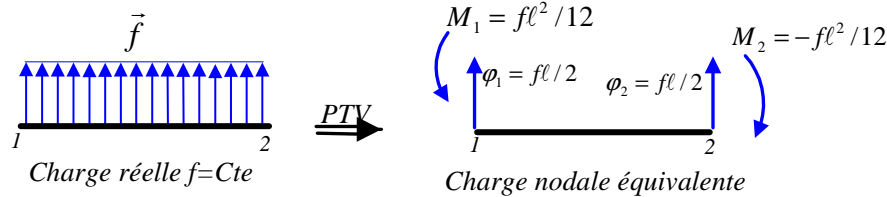
Le travail virtuel de ces efforts est

$$\delta W_f = \int_0^\ell \vec{f} \cdot \delta \vec{v} \, dx = \{\delta U_e\}^T \int_0^\ell [N]^T f \, dx$$



Pour une densité de charge uniforme nous obtenons : $\{F_d\}_e = \int_0^\ell f \langle N(x) \rangle^T dx = f \left\{ \begin{array}{c} \frac{\ell}{2} \\ \frac{\ell^2}{12} \\ \frac{\ell}{2} \\ -\frac{\ell^2}{12} \end{array} \right\}$

La prise en compte d'une charge répartie sur un élément ne consiste pas à appliquer simplement des efforts $f\ell/2$ aux noeuds.



Pour calculer l'état de contrainte sur les éléments (moment de flexion et effort tranchant) nous utilisons la loi de comportement intégrée :

$$M_f = EI v_{,xx} = EI \langle B \rangle \{U_e\} \text{ avec } \langle B \rangle = \left\langle \frac{6}{\ell^2}(-1+2s), \frac{2}{\ell}(-2+3s), \frac{6}{\ell^2}(1-2s), \frac{2}{\ell}(-1+3s) \right\rangle$$

$$T = -EI v_{,xxx} = -EI \langle B_{,x} \rangle \{U_e\} \text{ avec } \langle B_{,x} \rangle = \left\langle \frac{12}{\ell^3}, \frac{6}{\ell^2}, -\frac{12}{\ell^3}, \frac{6}{\ell^2} \right\rangle$$

Vous notez que le moment de flexion M_f est linéaire et que l'effort tranchant est constant par élément.

Exercice III-1: Étude d'une poutre sous son poids propre

Objectifs : mise en œuvre de la méthode des éléments finis, et illustrer la notion d'erreur liée à l'approximation.

Nous cherchons la réponse statique de la poutre sur appuis représentée par la figure ci contre.



Modèle à 1 élément.

Définissez vos vecteurs globaux : $\{U\} \quad \{F_l\}$ (bilan inconnues – équations)

Déterminer la matrice raideur.

le vecteur force généralisé associé au poids propre.

Écrivez le système réduit des équations, calculez les déplacements nodaux, représenter la déformée.

Calculer la flèche au centre de la poutre, et comparer à la solution analytique

$$v(\ell/2) = -\frac{5}{384} \frac{\rho g S \ell^4}{EI}$$

Calculer les efforts aux appuis, et vérifier l'équilibre global de la structure.

Calculer les efforts sur l'élément et tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment de flexion.

Comparer à la solution analytique.

Modèle à 2 éléments.

Déterminer la matrice raideur assemblée complète.

Déterminer le vecteur force généralisé associé au poids propre de la structure.

Écrivez le système réduit des équations, calculez les déplacements nodaux, comparez à la solution analytique.

Calculer les efforts aux nœuds, comparez à la solution analytique.

Calculer les efforts sur l'élément et tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment de flexion.

Comparer à la solution analytique.

Prise en compte de la symétrie

Préciser le nouveau maillage en précisant les conditions de symétrie.

Calculer la matrice raideur et retrouver la solution du modèle à 2 éléments.

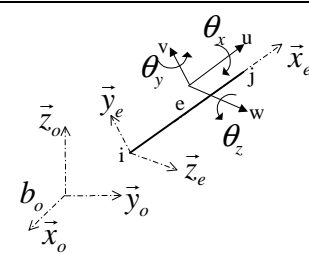
III-3 Application aux portiques

Pour calculer les portiques nous devons utiliser un élément poutre tridimensionnel. Cet élément est obtenu par superposition de trois modèles mathématiques : le modèle de traction, le modèle de torsion, et le modèle de flexion. Pour la flexion, vous savez que le problème se décompose en deux problèmes de flexion plane dans les deux plans principaux de la section droite de la poutre.

L'élément fini poutre tridimensionnel est un élément à deux nœuds et 6 degrés de liberté par nœud définis sur la base locale de l'élément.

$$\{\delta U_e\}^T = \left\langle (u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z)_i \quad (u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z)_j \right\rangle$$

Soit 12 « ddl » par élément



Par analogie avec les calculs présentés dans les chapitres I et II, il est assez simple de construire les matrices élémentaires associée aux modèles de traction, torsion et de flexion dans chaque plan principal d'inertie.

La matrice du modèle tridimensionnel est obtenue par superposition des quatre matrices élémentaires relatives à :

	variables	Caractéristiques mécaniques
Traction	u	$ES, \rho S$
Torsion	θ_x	$GJ, \rho I$
Flexion (\vec{x}, o, \vec{y})	v, θ_z	$EI_z, \rho S$
Flexion (\vec{x}, o, \vec{z})	w, θ_y	$EI_y, \rho S$

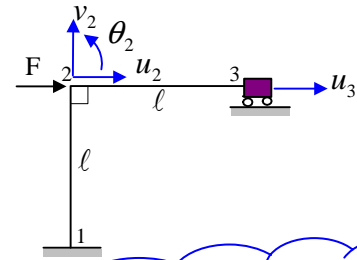
La matrice (12*12) correspondante est donnée dans le site en ligne. Il est clair que nous ne manipulerons pas ces matrices manuellement, d'autant que pour effectuer l'assemblage d'une

structure portique il faut effectuer un changement de base pour exprimer toutes les matrices élémentaires sur une base globale.

Manuellement nous ne traiterons que des cas simple de portique plan ayant des éléments d'axe \vec{x} ou \vec{y} tel que l'exemple ci-contre.

En statique le modèle à deux éléments finis est suffisant pour obtenir la solution exacte du problème. C'est un modèle à 4 variables $\langle u_2, v_2, \theta_2, u_3 \rangle$.

Il est fortement conseillé de réaliser par vous-même les calculs de ce modèle en suivant la démarche proposée pour l'étude des treillis. Puis d'analyser et de comparer vos résultats à ceux que nous allons obtenir en simplifiant ce modèle.

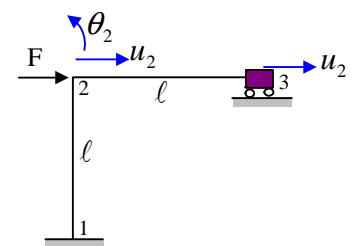


En effet en statique la variation du moment de flexion est linéaire sur chaque élément

Pour simplifier le modèle nous négligeons l'effort normal dans les éléments.

Compte tenu de cette hypothèse le modèle ne comporte plus que 2 variables $\langle u_2, \theta_2 \rangle$

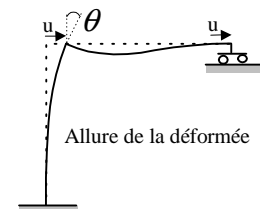
Calculons directement les matrices élémentaires sur ces 2 variables.



Pour l'élément 1 : $[K_1] = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}$ et pour l'élément 2 : $[K_2] = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4\ell^2 \end{bmatrix}$

D'où la matrice raideur assemblée réduite $[K_{red}] = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell \\ 6\ell & 8\ell^2 \end{bmatrix}$ sur $\langle u_2, \theta_2 \rangle$

La solution de $[K_{red}]\{U\} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$ est $\{U\} = \begin{cases} u_2 = \frac{2}{15} \frac{F \ell^3}{EI} \\ \theta_2 = -\frac{1}{10} \frac{F \ell^2}{EI} \end{cases}$

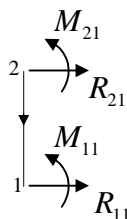


Nous utilisons les équations d'équilibre de chaque élément car nous n'avons pas calculé la matrice globale.

Calcul des réactions

Elément 1 : (2-1)

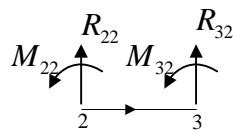
Notez l'orientation de l'élément de 2 vers 1 ce qui permet d'obtenir directement l'expression de la matrice raideur élémentaire sur les variables globales.



$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{21} \\ M_{21} \\ R_{11} \\ M_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \langle R_{21} \quad M_{21} \quad R_{11} \quad M_{11} \rangle = F \langle 1 \quad 0,4\ell \quad -1 \quad 0,6\ell \rangle$$

Élément 2 : (2-3)

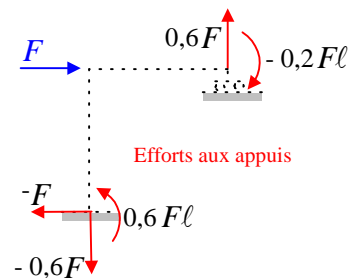


$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{22} \\ M_{22} \\ R_{32} \\ M_{32} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle R_{22} \quad M_{22} \quad R_{32} \quad M_{32} \rangle = F \langle -0,6 \quad -0,4\ell \quad 0,6 \quad -0,2\ell \rangle$$

Ce modèle ne nous donne pas toutes les composantes d'effort car nous avons négligé l'effort normal dans les éléments.

Pour calculer la composante verticale de l'effort au noeud 1, nous pouvons écrire l'équilibre de l'élément ou vérifier les équations d'équilibre de la structure.



Exercice III-2: Étude d'un portique

Objectifs : mise en œuvre de la méthode des éléments finis, changement de base, assemblage, résolution, calcul des efforts aux appuis, calcul des contraintes dans les éléments, et calcul des efforts aux nœuds internes.

Intéressons-nous à la réponse statique du portique plan représenté par la figure ci-contre.

On ne néglige pas l'effet de l'effort normal

$$\Rightarrow 3 \text{ DDL par nœuds } (u_i, v_i, \theta_i).$$

$$\text{On posera } \alpha = \frac{ES / \ell}{EI / \ell^3}$$

Modèle à 2 éléments.

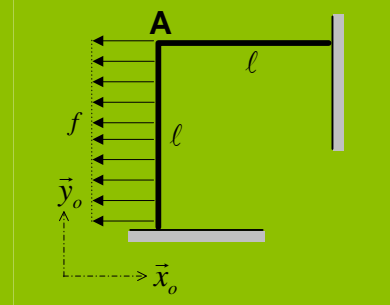
Définissez vos vecteurs globaux : $\{U\}$ $\{F_i\}$ (bilan inconnues – équations)

Déterminer la matrice raideur assemblée réduite.
le vecteur force généralisé associé à la pression linéique.

Pour $\alpha = 2$

Déterminer la déformée statique (déplacements nodaux).
Calculer les efforts aux appuis, et vérifier les équations d'équilibre global de la structure.
Pour chaque élément calculer les efforts (contraintes) au point A et analysez les discontinuités.
Que pensez-vous de votre modèle, est-il satisfaisant ?

Proposer un modèle plus satisfaisant, pensez-vous pouvoir résoudre ce modèle à la main ?



Exercice III-3: Études statique et dynamique d'une poutre

Objectifs : Illustrer la notion d'erreur liée à l'approximation.

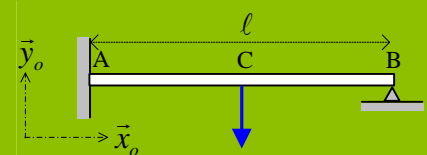
Nous cherchons la réponse statique de la poutre sur appuis représentée par la figure ci-contre.

Modèle à 1 élément.

Déterminer la matrice raideur.
le vecteur force généralisé associé à la charge

Calculer la réponse statique, les efforts aux appuis et tracer le diagramme des efforts sur l'élément.
Comparer à la solution analytique :

$$v(C) = -\frac{7}{768} \frac{F\ell^3}{EI}, \quad \theta(C) = -\frac{1}{128} \frac{F\ell^2}{EI}, \quad \theta(B) = \frac{1}{32} \frac{F\ell^2}{EI}$$



$$M_f(A) = 3F\ell/16, \quad M_f(C) = 5F\ell/32$$

Que pensez-vous de ce modèle, est-il satisfaisant ?

Modèle à 2 éléments.

Calculer la réponse statique, les efforts aux appuis et tracer le diagramme des efforts sur les éléments.
Justifier les résultats de ce modèle.

Réponse dynamique : Calcul des fréquences propres de la structure

Modèle à 1 élément fini

Modèle à deux éléments finis (vous pouvez utiliser Matlab ou Maple)

Comparer à la solution analytique :

$$\omega_1 = 15,42 \sqrt{\frac{EI}{\rho S \ell^4}}, \quad \omega_2 = 49,96 \sqrt{\frac{EI}{\rho S \ell^4}}, \quad \omega_3 = 104,3 \sqrt{\frac{EI}{\rho S \ell^4}}$$

Vous avez toutes les solutions analytiques des poutres sur le site « vibration »

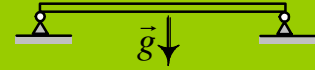
<https://pedagogie.ec-nantes.fr/meefi/Vibra/vibra.htm>

III-4 Petit quiz

Vous devez pouvoir justifier toutes vos réponses

Q1 :

Un modèle éléments finis classique d'une poutre soumise à son poids propre peut-il conduire à la solution exacte en statique ?



Proposez différentes modélisations permettant de calculer la structure représentée sur la figure ci-contre.

Q2 :

L'élément fini poutre classique assure la continuité de quels champs ?

Q3 :

Dans quel cas la solution élément finis du calcul statique d'un portique peut-elle être exacte ?

Q4 :

De quelle nature est l'approximation de l'effort tranchant sur un élément finis poutre classique ?

Q5 :

En post-traitement comment calculez vous les diagrammes du moment de flexion sur les éléments d'une structure portique ?

Q6 :

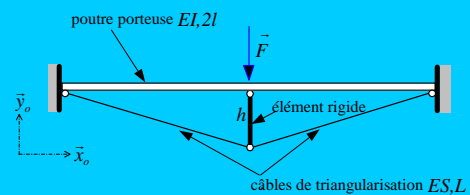
Le moment de flexion calculé en post-traitement sera-t-il continu entre les éléments ?

Q7 :

Pourquoi les variables de l'élément fini poutre classique sont-elles v, θ ?

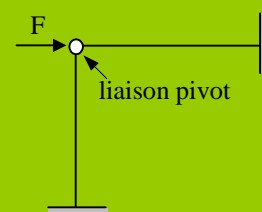
Q8 :

Proposez un modèle éléments finis de la structure représentée par la figure ci-contre (précisez le nombre de variables de votre modèle).



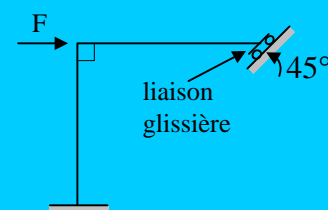
Q9 :

Proposez un modèle éléments finis de la structure représentée par la figure ci-contre (précisez les variables de votre modèle).



Q10 :

Proposez un modèle éléments finis, en négligeant l'effort normal, de la structure représentée par la figure ci-contre (précisez les variables de votre modèle).



Rien ne vous empêche de discuter vos réponses avec votre enseignant.

Notes personnelles

Formulation intégrale

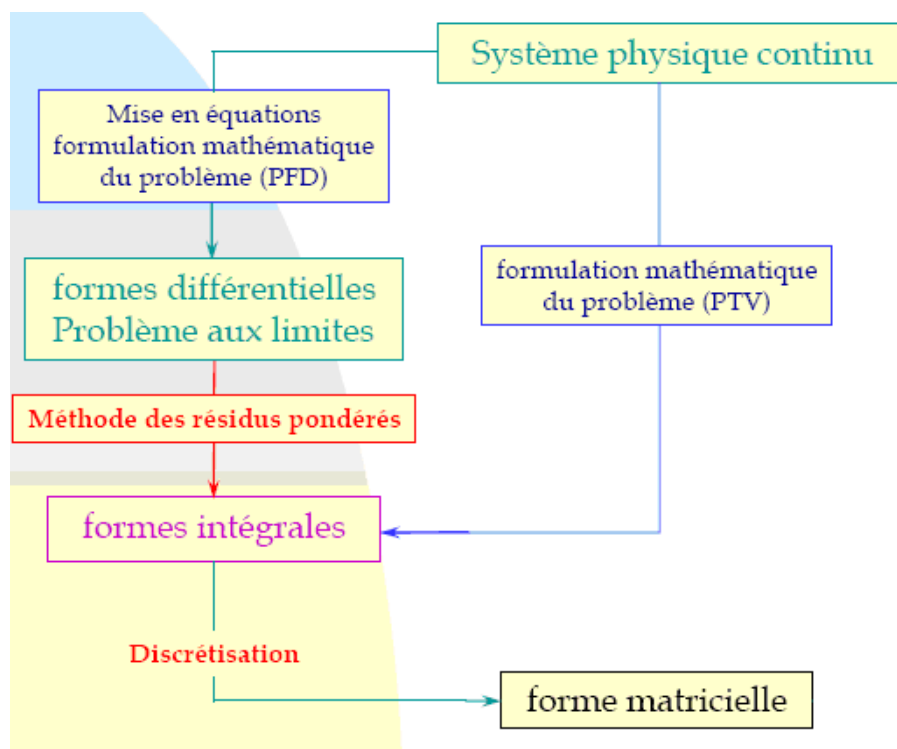
IV-1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux formulations intégrales (ou variationnelles) des équations de comportement d'un système physique que l'on connaît généralement sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles « EDP ».

Ces formulations fournissent selon le choix des fonctions de pondération et d'approximation tout un ensemble de méthodes :

- Méthode de collocation (par point ou sous domaine)
- Méthode des moindres carrés
- Méthode des équations intégrales
- Méthode de Galerkin (Ritz)

La « MEF » est un cas particulier basé sur la formulation de Galerkin avec une construction systématique de l'approximation par sous domaine « éléments finis ».



Un système physique est caractérisé par un ensemble de variables u (déplacements, pressions, températures, contraintes, concentrations, etc.).

Le modèle mathématique, basé sur des hypothèses simplificatrices, permet d'écrire des relations entre ces variables en utilisant les lois de la physique. Ces équations sont des équations aux dérivées partielles.

Sur le domaine

$$\mathcal{L}(u) = f \text{ équation locale}$$

et des conditions aux limites

sur u condition de Dirichlet

sur $\frac{\partial u}{\partial n}$ condition de Neuman

C. de Dirichlet sur S_u

$$u = u_d$$

$$\mathcal{L}(u) = f$$

C. de Neuman sur S_f

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_s$$

Conditions de flux

$$\text{Plus généralement } \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = f_s$$

Condition dite de Cauchy

En résumé le comportement d'un système continu est décrit par des équations aux dérivées partielles « EDP » de la forme

$$\begin{cases} \forall u \in D & \mathcal{L}(u) = f \\ \forall u \in \Gamma & \mathcal{Q}(u) = e \end{cases}$$

L'équation locale traduit le comportement du milieu, et les conditions aux limites les échanges entre le milieu et l'extérieur.

Quelques exemples

mécanique



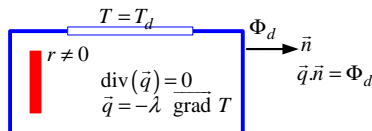
On cherche v solution de :

$$\rho S \ddot{v} + EI v_{,x^4} = -\rho g S \text{ sur }]0, \ell[$$

Conditions aux limites

$$\text{en } x=0 : \begin{cases} v(0,t) = 0 \\ v_{,x}(0,t) = 0 \end{cases} \quad \text{en } x=\ell : \begin{cases} v(\ell,t) = 0 \\ EI v_{,x^2}(\ell,t) = 0 \end{cases}$$

Thermique stationnaire

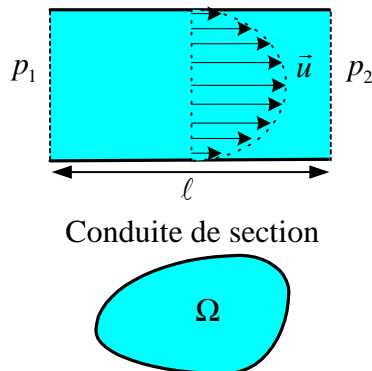


Problème de thermique stationnaire avec une source interne de production de chaleur r , une température imposée sur une partie de la frontière et une isolation sur le reste assurant un flux de chaleur imposé.

on cherche T solution de :

$$\begin{cases} \text{div } \vec{q} - r = 0 & \text{où } \vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad } T} \text{ dans } \Omega \\ \vec{q} \cdot \vec{n}_{ext} = \Phi_d & \text{sur } \partial_2 \Omega \\ T = T_d & \text{sur } \partial_1 \Omega \end{cases}$$

Hydrodynamique



Problème de l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans une conduite de section droite Ω . On note

$$\text{chute linéique de pression } \pi = \frac{p_2 - p_1}{\ell}$$

viscosité cinématique du fluide μ

Le champ des vitesses $\vec{u} = u \vec{z}$ est solution des équations de Navier-Stokes.

$$\begin{aligned} \text{équation locale } \forall M \in \Omega & \quad \Delta(u) = \frac{\pi}{\mu} \\ \text{conditions aux limites } \forall M \in \Gamma & \quad u = 0 \end{aligned}$$

IV-2 Résidus pondérés

IV-2.1 Formulation forte

Le résidu est l'erreur commise lorsque l'on utilise une approximation « u^* » du champ « u » pour écrire les équations du problème. Admettons que l'on sache construire une approximation satisfaisant toutes les conditions aux limites du problème.

$$\rightarrow \mathcal{R}(u^*) = \mathcal{L}(u^*) - f \text{ sur le domaine}$$

Si u^ est la solution du problème alors le résidu est nul*

Au lieu de résoudre l'équation $\mathcal{R}(u^*) = 0$ on considère la forme intégrale équivalente

$$\forall \varphi \quad \int_{\mathcal{D}} \varphi \mathcal{R}(u^*) dV = 0$$

C'est l'idée de base de la méthode des résidus pondérés qui consiste à annuler l'erreur (résidu) pondérée sur le domaine.

Pour une approximation u^* à n paramètres

$$u^* = \sum_{i=1}^n W_i(M) q_i = [W(M)] \{q\}$$

Les W_i sont les n fonctions de forme de l'approximation

$$\text{nous obtenons l'équation} \quad \forall \varphi \quad \int_{\mathcal{D}} \varphi \mathcal{R}([W(M)] \{q\}) dV = 0$$

Pour obtenir un système de n équations intégrales il faut choisir n fonctions de pondérations

$$\forall i \in [1, n] \quad \int_{\mathcal{D}} P_i(M) \mathcal{R}([W(M)] \{q\}) dV = 0$$

Notez la perte d'information liée au choix d'un nombre fini de fonctions de pondération P_i .

Soit sous forme matricielle

$$[L] \{q\} = \{F\} \text{ avec } \begin{cases} [L] = \int_{\mathcal{D}} \{P(M)\}^T \mathcal{L}([W(M)]) dv \\ \{F\} = \int_{\mathcal{D}} \{P(M)\}^T f(M) dv \end{cases}$$

Sous condition que le choix des fonctions de formes et des fonctions de pondération conduit à un système matriciel bien conditionné, sa résolution nous donnera une approximation du problème posé.

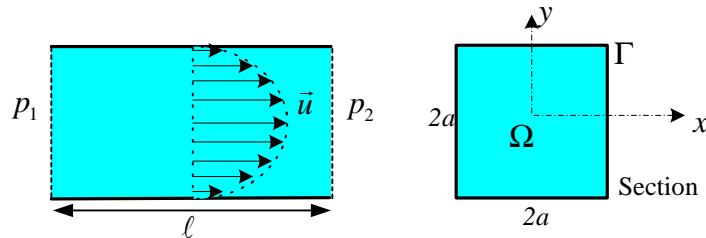
Remarques

- La construction de l'approximation (fonctions de forme) satisfaisant toutes les conditions aux limites est, en pratique, impossible pour des problèmes réels. Pour illustrer la méthode nous ne traitons que des problèmes académiques.
- Le choix des fonctions de pondération est à priori totalement libre (cela donne évidemment de plus ou moins bons résultats), il faut cependant s'assurer que les équations obtenues sont indépendantes (régularité du système matriciel).

- **La méthode de collocation** par point est la plus simple de mise en œuvre. Cette méthode consiste à annuler l'erreur d'approximation en un nombre fini de points du domaine. Les résultats obtenus sont très moyens et de plus sensibles au choix des points de collocation.
- **La méthode de Galerkin**, consiste à utiliser comme fonctions de pondération les fonctions de forme du problème. Plus coûteuse en calcul (intégrales sur le domaine), elle conduit pour des opérateurs différentiels auto-adjoints à une forme matricielle symétrique. De plus, si le problème est bien posé, nous sommes assurés de la régularité du système et de la convergence de la solution cherchée (approximation d'autant plus précise que l'on augmente le nombre de paramètres).

Application

Appliquons cette formulation forte au problème de l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible présenté dans l'introduction du chapitre, dans le cas d'une conduite de section droite Ω carrée



Le champ des vitesses $\vec{u} = u(x, y) \vec{z}$ s'annule sur la frontière du domaine $\forall M \in \Gamma \quad u = 0$

et est solution de l'équation locale $\forall M \in \Omega \quad \Delta(u) = \frac{\pi}{\mu}$, avec $\pi = \frac{p_2 - p_1}{\ell}$ chute linéique de pression, et μ viscosité cinématique du fluide

Soit l'approximation à 1 paramètre $u^*(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) q$

Elle satisfait les conditions aux limites sur la frontière.

Le résidu est défini par $\mathcal{R}(u^*) = \Delta(u^*) - \frac{\pi}{\mu} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - \frac{\pi}{\mu} = 2q (x^2 + y^2 - 2a^2) - \frac{\pi}{\mu}$

D'où l'équation intégrale $\forall P \quad \int_{\Omega} P(x, y) \left[2q (x^2 + y^2 - 2a^2) - \frac{\pi}{\mu} \right] dx dy = 0$

La solution "q" dépendra du choix de la fonction de pondération.

Appliquons la méthode de **collocation**

au point $(0, 0)$ nous obtenons $q = -\frac{1}{4a^2} \frac{\pi}{\mu} = -0,25 \frac{\pi}{\mu a^2}$

au point $(a/2, a/2)$ nous obtenons: $q = -\frac{1}{3a^2} \frac{\pi}{\mu} = -0,333 \frac{\pi}{\mu a^2}$

Appliquons la méthode de **Galerkin** $P(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)$

tous calculs faits ... nous obtenons: $q = -0,3125 \frac{\pi}{\mu a^2}$

La valeur de référence obtenue par un développement en série de Fourier à 14 termes est

$$q = -0,2947 \frac{\pi}{\mu a^2}$$

Le meilleur résultat est obtenu par la méthode de Galerkin, de plus les résultats par collocation sont sensibles au choix de la position du point, donc peu fiables.

IV-2.2 Transformation de la forme intégrale

La première formulation intégrale (formulation forte) ne permet en pratique de traiter que des problèmes simples pour lesquels il est possible de déterminer des fonctions de formes satisfaisant toutes les conditions aux limites du problème (fonctions de comparaison).

De manière à diminuer les conditions imposées aux fonctions de forme, nous allons transformer la forme intégrale en effectuant une intégration par parties.

Partons de la formulation forte $\forall P \int_{\Omega} P \left(\Delta u^* - \frac{\pi}{\mu} \right) dS = 0$

Compte tenu* de $\text{div} \left(P \overrightarrow{\text{grad}}(u^*) \right) = P \Delta u^* + \overrightarrow{\text{grad}}(P) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(u^*)$

$$\forall P \int_{\Omega} \left(\text{div} \left(P \overrightarrow{\text{grad}}(u^*) \right) - P \frac{\pi}{\mu} - \overrightarrow{\text{grad}}(P) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(u^*) \right) dS = 0$$

Le TH d'Ostrogradsky : $\int_{\mathcal{D}} \text{div}(\vec{A}) dV = \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$

nous conduit à:

$$\forall P \int_{\Gamma} \left(P \overrightarrow{\text{grad}}(u^*) \cdot \vec{n} \right) dS = \int_{\Omega} \left(P \frac{\pi}{\mu} + \overrightarrow{\text{grad}}(P) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(u^*) \right) dS$$

$$\text{Soit: } \forall P \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}}(P) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(u^*) dS - \int_{\Gamma} P \frac{\partial u^*}{\partial n} dS = - \int_{\Omega} P \frac{\pi}{\mu} dS$$

$$^* \overrightarrow{\text{grad}}(u) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{div} \left(P \overrightarrow{\text{grad}}(u) \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= P \Delta u + \overrightarrow{\text{grad}}(P) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(u) \end{aligned}$$

Ce terme prend en compte l'erreur d'approximation sur les conditions aux limites de flux.

Si nous appliquons la méthode de Galerkin avec l'approximation à 1 paramètre

$$u^* = W(x, y)q$$

$$\text{et } P = W(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) \text{ alors } \forall M \in \Gamma \quad P(M) = 0$$

$$\text{L'équation intégrale se simplifie : } \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} P \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u^* dS = - \int_{\Omega} P \frac{\pi}{\mu} dS$$

$$\text{Et en posant : } [B] = [\overrightarrow{\text{grad}} W] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2x(y^2 - a^2) \\ 2y(x^2 - a^2) \end{Bmatrix}$$

Bien que de forme différente cette équation scalaire redonne le même résultat, car l'approximation satisfait toutes les CL du problème

Nous obtenons l'équation matricielle $[L]\{q\} = \{F\}$

$$\text{avec } [L] = \int_{\Omega} [B]^T [B] dS \quad \text{et } \{F\} = - \frac{\pi}{\mu} \int_{\Omega} P dS$$

$$\text{Tous calculs fait } q = -0,3125 \frac{\pi}{\mu a^2}$$

L'intérêt de la transformation est de faire apparaître les conditions aux limites de flux dans la forme intégrale, ce qui permet de les prendre en compte dans la formulation au lieu de les satisfaire à priori lors de la détermination des fonctions de forme.

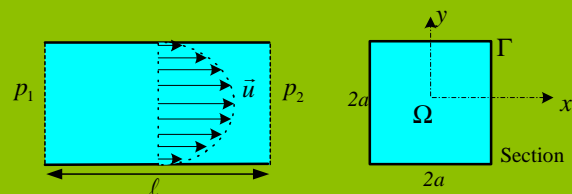
Exercice IV-1: Conduite de section droite du cours

Objectifs : Utiliser une approximation à deux paramètres, et l'écriture matricielle des équations.

Champ inconnu : les vitesses $\vec{u} = u(x, y) \vec{z}$

Sur la frontière du domaine $\forall M \in \Gamma \quad u = 0$

$$\text{L'équation locale : } \forall M \in \Omega \quad \Delta(u) = \frac{\pi}{\mu}$$



Afin d'améliorer la précision nous allons utiliser une approximation à deux paramètres de la forme :

$$u^*(x, y) = W_1(x, y) q_1 + W_2(x, y) q_2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} W_1(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) \\ W_2(x, y) = W_1(x, y)(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Pourquoi cette approximation peut-elle être utilisée avec la formulation forte (1ère forme intégrale du Pb) ?

Donner la forme matricielle de l'équation correspondant à la formulation forte de Galerkin.

Utiliser les notations matricielles

Donner la forme matricielle de l'équation correspondant à la formulation faible (2ème forme intégrale du Pb).
calculer la matrice [B]

Effectuez des simulations numériques en utilisant le fichier MAPLE, proposé sur le site en ligne.

Exercice IV-2: problème de thermique

Objectifs : Utiliser la formulation variationnelle et l'approximation sur un problème de physique.

On considère un problème stationnaire de conduction thermique. Les équations pour un milieu isotrope Ω de frontière $\partial\Omega$ sont :

$$(P) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{q} - r = 0 & \text{dans } \Omega \\ \vec{q} \cdot \vec{n}_{ext} = \Phi_d & \text{sur } \partial_2\Omega \\ T = T_d & \text{sur } \partial_1\Omega \end{cases} \quad \text{avec le vecteur flux de chaleur } \vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \text{ dans } \Omega$$

et r une source interne de production de chaleur,
 T_d température imposée sur sa frontière $\partial_1\Omega$,
 Φ_d un flux de chaleur imposé sur son bord $\partial_2\Omega$

Montrer que le problème (P) est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} (\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \delta T - r \delta T) dV + \int_{\partial\Omega} \Phi_d \delta T dS = 0 \quad \forall \delta T \text{ tel que } \delta T = 0 \text{ sur } \partial_1\Omega$$

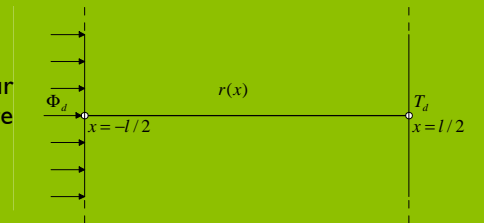
Et $T = T_d$ sur $\partial_1\Omega$ (thermiquement admissible)

$$\text{On rappelle que } \operatorname{div}(\alpha \vec{f}) = \alpha \operatorname{div} \vec{f} + \vec{f} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \alpha \text{ et } \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{f} dV = \int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{n}_{ext} dS.$$

Formulation unidimensionnelle

Pour étudier le transfert de chaleur dans un mur de hauteur infinie, on étudie le problème unidimensionnel où la température ne dépend plus que d'un paramètre spatial x .

On considère le domaine représenté sur la figure ci-contre



Identifier les domaines : Ω , $\partial_1\Omega$ et $\partial_2\Omega$.

Montrer que, dans ce cas, la formulation précédente se réduit à :

$$\int_{-l/2}^{l/2} \lambda \frac{dT}{dx} \frac{d(\delta T)}{dx} dx = \int_{-l/2}^{l/2} r(x) \delta T dx + \Phi_d \delta T \Big|_{x=-l/2}$$

Préciser les conditions à satisfaire pour établir cette équation.

On considère un élément fini linéaire à deux nœuds i et j de longueur l .

L'approximation de la température sur cet élément est alors : $T(x) = T_i \varphi_i(x) + T_j \varphi_j(x)$

où les fonctions d'interpolation linéaires sont : $\varphi_i(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{l}$ et $\varphi_j(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{l}$.

Discrétiser la formulation précédente et calculer :

La matrice raideur $[K]$;

Le vecteur flux généralisé $\{F_R\}$ dû à une production uniforme de chaleur $r(x) = r_0$ sur l'élément ;

Le vecteur flux généralisé $\{F_d\}$ dû à un flux imposé Φ_d au nœud i de l'élément.

En utilisant cet élément fini, résoudre le problème présenté sur la figure suivante.



Il n'y a pas de source de chaleur, l'élément (1-2) est de longueur l et a pour conductivité thermique λ , et l'élément (2-3) est de longueur $l/3$ et a pour conductivité thermique 2λ .

Déterminer la répartition de température dans les éléments, et calculer le flux de chaleur inconnu au point 3.

IV-3 Formulation variationnelle en mécanique

Ce paragraphe consacré à la formulation variationnelle d'un problème de mécanique, reprend des notions abordées en Mécanique des Milieux continus « MMC » et en Mathématiques, il est la base de toutes les simulations en ingénierie mécanique et doit faire partie, à ce titre, de votre culture d'ingénieur généraliste.

IV-3.1 Formulation intégrale

Partons de l'équation locale et des conditions aux limites définies dans le cadre de la MMC.

$$\begin{cases} \forall M \in D & \rho \ddot{\vec{u}} - \text{div}(\vec{\sigma}) = \vec{f} \\ \forall M \in \Gamma_u & \vec{u} = \vec{u}_d \\ \forall M \in \Gamma_\sigma & \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}_d \end{cases}$$

PFD appliqué à un élément de matière

Pour exprimer l'équation locale en fonction des déplacements $\rho \ddot{\vec{u}} + \mathcal{L}(\vec{u}) = \vec{f}$

il faut associer au système précédent deux relations :

- Les lois de comportement:

$$\vec{\sigma} = \text{fct}(\vec{\varepsilon})$$

Physique du matériau & expérimentale.

- Les Relations déplacements - déformations:

$$\vec{\varepsilon} = \text{fct}(\vec{u})$$

Géométrie

Effectuons une intégration par parties de l'équation locale en supposant les fonctions de pondération suffisamment dérivables.

L'équation locale

$$\text{"EL"} \Leftrightarrow \forall \vec{P} \int_D \vec{P} \cdot (\rho \ddot{\vec{u}} - \text{div}(\vec{\sigma}) - \vec{f}) dV = 0 \quad (\text{Formulation forte})$$

Sachant que* $\vec{\sigma} : \text{grad}_s(\vec{P}) = \text{div}(\vec{\sigma} \vec{P}) - \vec{P} \cdot \text{div}(\vec{\sigma})$

$$\text{"EL"} \Leftrightarrow \forall \vec{P} \int_D (\vec{P} \cdot \rho \ddot{\vec{u}} + \vec{\sigma} : \text{grad}_s(\vec{P}) - \text{div}(\vec{\sigma} \vec{P}) - \vec{P} \cdot \vec{f}) dV = 0$$

Appliquons le TH d'Ostrogradsky

$$\int_D \text{div}(\vec{\sigma} \vec{P}) dV = \int_{\partial D} \vec{\sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial D} \vec{P} \cdot \vec{\sigma} \vec{n} dS$$

Utilise la symétrie du tenseur des contraintes

$$\text{"EL"} \Leftrightarrow \forall \vec{P} \int_D (\vec{P} \cdot \rho \ddot{\vec{u}} + \vec{\sigma} : \text{grad}_s(\vec{P}) - \vec{P} \cdot \vec{f}) dV - \int_{\partial D} (\vec{P} \cdot \vec{\sigma} \vec{n}) dS = 0$$

* Cette formule utilise la symétrie du tenseur des contraintes et les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} : \text{grad}(\vec{u}) &= \text{div}(\vec{\sigma} \vec{u}) - \vec{u} \cdot \text{div}(\vec{\sigma}) \\ \vec{\sigma} : \text{grad}^T(\vec{u}) &= \text{div}(\vec{\sigma} \vec{u}) - \vec{u} \cdot \text{div}(\vec{\sigma}) \end{aligned}$$

La démonstration de ces relations se fait simplement à partir d'une relation indicielle de la forme suivante:

$$\sigma_{ij} u_{i,j} = (u_i \sigma_{ij})_{,j} - u_i \sigma_{ij,j}$$

En tenant compte des conditions aux limites sur la frontière Γ_σ $\forall M \in \Gamma_\sigma$ $\overline{\overline{\sigma}} \vec{n} = \vec{T}_d$

→

"EL."

{ C.Limites sur Γ_σ

$\overline{\overline{\sigma}} \vec{n}$ champ inconnu sur cette frontière

$$\Leftrightarrow \forall \vec{P} \int_D (\vec{P} \cdot \rho \ddot{\vec{u}} + \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\text{grad}_s}(\vec{P})} - \vec{P} \cdot \vec{f}) dV - \int_{\Gamma_u} \vec{P} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \vec{n} dS - \int_{\Gamma_\sigma} \vec{P} \cdot \vec{T}_d dS = 0$$

Pour obtenir une équation à un champ inconnu \vec{u} (les déplacements)

Nous utilisons des fonctions de pondération à valeur nulle sur la frontière Γ_u

$$\forall M \in \Gamma_u \quad \vec{P}_{(M)} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \int_{\Gamma_u} \vec{P} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \vec{n} dS = 0$$

Fonction de pondération
cinématiquement admissible

D'où la **formulation variationnelle** équivalente au système d'équations aux dérivées partielles du problème, pour des fonctions de pondération cinématiquement admissibles.

$$\forall \vec{P} \quad \vec{P} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_u \quad \int_D (\vec{P} \cdot \rho \ddot{\vec{u}} + \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\text{grad}_s}(\vec{P})} - \vec{P} \cdot \vec{f}) dV = \int_{\Gamma_\sigma} \vec{P} \cdot \vec{T}_d dS$$

Les conditions aux limites en déplacement $\forall M \in \Gamma_u$ $\vec{u} = \vec{u}_d$ restent à vérifier

L'intérêt de cette forme intégrale est de tenir compte de l'erreur d'approximation commise sur l'équation locale et les conditions aux limites en force (flux). Elle n'apporte rien si l'on sait construire une approximation satisfaisant toutes les conditions aux limites du problème (cf. exercices en ligne).

La solution approchée sera d'autant meilleure que la base des fonctions de forme utilisées sera riche, c'est-à-dire permettant de bien représenter la solution cherchée.

Utiliser une approximation quelconque revient à chercher une solution nécessairement éloignée de la solution exacte or pour quelques problèmes académiques nous savons construire des bases de fonctions satisfaisant un certain nombre des équations du problème ce qui conduit de bonnes approximations de la solution.

La méthode des éléments finis utilise cette formulation, avec deux idées fortes

- la construction systématique des fonctions de forme par sous domaine « éléments finis »
- utilisation des variables nodales comme paramètres d'approximation ce qui permet d'imposer les conditions aux limites en déplacement du problème.

IV-3.2 Équivalence avec le PTV

PTV : $\forall \delta \vec{u} \quad \delta A = \delta T$ à tout instant

avec: δA travail virtuel des quantités d'accélération

$$= \int_{\mathcal{D}} \vec{\gamma}_{(P)} \cdot \delta \vec{u} \, dm_{(P)} = \int_{\mathcal{D}} \delta \vec{u} \cdot \rho \, \ddot{\vec{u}} \, dV$$

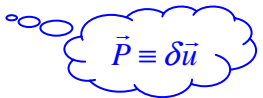
δT travail virtuel des efforts intérieurs et extérieurs

$$= - \int_{\mathcal{D}} \overline{\overline{\sigma}} : \delta \overline{\overline{\epsilon}} \, dV + \int_{\mathcal{D}} \delta \vec{u} \cdot \vec{f} \, dV + \int_{\partial \mathcal{D}} \delta \vec{u} \cdot \vec{T} \, dS$$

Compte tenu des relations déplacements - déformations* : $\overline{\overline{\delta \epsilon}} = \overline{\overline{\text{grad}_s(\delta \vec{u})}}$

Nous obtenons le PTV.

$\forall \delta \vec{u}$

$$\int_{\mathcal{D}} \delta \vec{u} \cdot \rho \, \ddot{\vec{u}} \, dV = - \int_{\mathcal{D}} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\text{grad}_s(\delta \vec{u})}} \, dV + \int_{\mathcal{D}} \delta \vec{u} \cdot \vec{f} \, dV + \int_{\partial \mathcal{D}} \delta \vec{u} \cdot \vec{T} \, dS$$


C'est la formulation variationnelle du problème, il y a bien entendu équivalence entre le PTV et le système d'équations différentielles du problème.

L'intérêt de ce principe est de fournir directement la forme intégrale sans avoir à passer par les équations aux dérivées partielles

Notez que pour $\delta \vec{u} = \vec{0}$ sur Γ_u $\int_{\partial \mathcal{D}} \delta \vec{u} \cdot \vec{T} \, dS = \int_{\Gamma_\sigma} \delta \vec{u} \cdot \vec{T}_d \, dS$

A titre de travail personnel partez du PTV, effectuez l'intégration par parties pour retrouver l'équation locale et les conditions aux limites du problème. Vous complétez ainsi le cours sur la formulation variationnelle d'un problème de mécanique.

IV-3.3 Écriture matricielle du PTV

Nous cherchons maintenant une solution approchée du problème sous la forme d'une combinaison linéaire de n fonctions dites fonctions de forme. La méthode consiste alors à affaiblir la forme intégrale précédente en ne la satisfaisant que pour n fonctions de pondération. Utilisons la méthode de Galerkin (mêmes fonctions de forme pour l'approximation et la pondération).

Pour l'approximation $\{u^{*(M,t)}\} = [W_{(M)}] \{q_{(t)}\}$

avec: $[W_{(M)}]$ matrice des fonctions de forme

$\{q_{(t)}\}$ vecteur des paramètres de l'approximation.

Pour les fonctions de pondération $\{P_{(M)}\} = [W_{(M)}] \{\delta q\}$

* Cette relation sur le taux de déformation est démontrée en MMC, nous admettons ce résultat sans démonstration.

avec $\delta q = \langle 1, 0, 0, \dots \rangle$ nous obtenons $P_1 = W_1$
 $\delta q = \langle 0, 1, 0, \dots \rangle$ nous obtenons $P_2 = W_2$
Etc....
 $\delta q = \langle 0, 0, 0, \dots, 1 \rangle$ nous obtenons $P_n = W_n$

Pour exprimer le produit $\bar{\sigma} : \bar{\delta \varepsilon}$ nous utilisons une représentation vectorielle des tenseurs

$$\bar{\sigma} : \bar{\delta \varepsilon} = \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}$$

avec: $\{\varepsilon\}^T = \langle \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{xz}, 2\varepsilon_{yz} \rangle$
 $\{\sigma\}^T = \langle \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \rangle$

La forme matricielle associée aux lois de comportement du matériau est alors :

$$\{\sigma_{(M)}\} = [D_{(M)}] \{\varepsilon_{(M)}\}$$

Et celle des relations déformations - déplacements.

$$\{\varepsilon_{(M)}\} = \{\overline{\overline{\text{grad}_s \vec{u}_{(M)}}}\} = [L] \{u_{(M)}\}$$

$[L]$ matrice d'opérateurs différentiels correspondant à l'expression du gradient symétrique des déplacements.

Compte tenu de ces notations le produit $\bar{\sigma} : \bar{\delta \varepsilon}$

$$\bar{\sigma}^* : \overline{\overline{\text{grad}_s (\vec{P})}} = \{P_{(M)}\}^T [L]^T [D_{(M)}] [L] \{u^*_{(M)}\}$$

Soit compte tenu de l'approximation et de la pondération

$$\bar{\sigma}^* : \overline{\overline{\text{grad}_s (\vec{P})}} = \{\delta q\}^T [B_{(M)}]^T [D_{(M)}] [B_{(M)}] \{q_{(t)}\}$$

avec $[B_{(M)}] = [L] [W_{(M)}]$

Reportons ces expressions dans la formulation variationnelle nous obtenons:

$$\{\delta q\}^T \int_{\mathcal{D}} ([W]^T \rho [W] \{\ddot{q}\} + [B]^T [D] [B] \{q\} - [W]^T \{f\}) dV = \{\delta q\}^T \int_{\Gamma_\sigma} [W]^T \{T_d\} dS$$

Cette équation pouvant être écrite quelque soit $\{\delta q\}$, nous obtenons l'équation matricielle :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\}$$

avec: $[M] = \int_{\mathcal{D}} [W]^T \rho [W] dV$
 $[K] = \int_{\mathcal{D}} [B]^T [D] [B] dV$
 $\{F\} = \int_{\mathcal{D}} [W]^T \{f\} dV + \int_{\Gamma_\sigma} [W]^T \{T_d\} dS$

IV-3.4 Applications à quatre modèles de l'ingénieur

Pour le modèle « **traction – compression** » présenté dans le chapitre II nous avons :

$$[D] = ES \quad [L] = \frac{\partial}{\partial x}$$

Pour le modèle « **flexion** » présenté dans le chapitre III

$$[D] = EI \quad [L] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Pour les modèles « **de l'élasticité plane** »

Le modèle « **contraintes planes** » s'applique à des pièces chargées transversalement dont les faces ne sont pas chargées (plaques et coques minces, capacité sans effet de fond à bords libres, etc...)

Hypothèse $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ou bien $\{\sigma\}^T = \langle \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \rangle$

On considère que l'état de contrainte à l'intérieur du domaine est voisin de l'état de contrainte sur les surfaces, donc plan par rapport à la normale à la surface.

Écrivons l'inverse de la loi de HOOKE pour déterminer le tenseur des déformations à partir du tenseur des contraintes.

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{trace}(\bar{\sigma}) \bar{1} + \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma}$$

Ne conservons que les termes à travail non nul.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

La déformation ε_{33} non prise en compte dans la loi de comportement, peut être calculée à posteriori

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Inversons cette relation

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

Le modèle « **déformations planes** » s'applique à des pièces massives dont les déformations longitudinales seront suffisamment faibles pour être négligées.

Hypothèse :
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{soit : } \{\varepsilon\}^T = \langle \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12} \rangle$$

Écrivons la loi de HOOKE pour déterminer le tenseur des contraintes à partir du tenseur des déformations.

$$\bar{\sigma} = \lambda \text{trace}(\bar{\varepsilon}) \bar{1} + 2\mu \bar{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

Ne conservons que les termes à travail non nul.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

La contrainte σ_{33} qui n'est pas prise en compte dans la loi de comportement, peut être calculée à posteriori par : $\sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$

En résumé pour l'**élasticité plane**

La matrice d'élasticité est de la forme:

$$[D] = \frac{E(1-a\nu)}{(1+\nu)(1-\nu-a\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-a\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-a\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu-a\nu)}{2(1-a\nu)} \end{bmatrix}$$

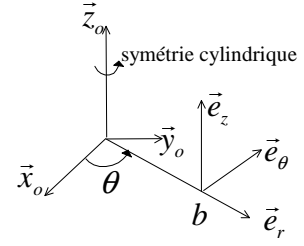
$$\text{avec} \quad \begin{cases} a = 0 & \text{en contraintes planes} \\ a = 1 & \text{en déformations planes} \end{cases}$$

$$\text{et l'opérateur différentiel } [L] : \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \text{tel que } \{\varepsilon\} = [L]\{u\}$$

Pour les modèles « **axisymétriques** »

Nous utilisons le système de coordonnées cylindriques. Compte tenu des hypothèses de symétrie, le champ des déplacements est de la forme :

$${}^b\{\vec{u}_{(M,t)}\} = \begin{Bmatrix} u_r(r,z,t) = u \\ u_\theta = 0 \\ u_z(r,z,t) = w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}$$



Pour déterminer l'opérateur $[L]$ nous partons de la définition du gradient

$$d\vec{u} = \overline{\overline{\text{grad}(\vec{u})}} d\vec{X}$$

$$\text{avec sur la base } b : {}^b\{d\vec{X}\} = \begin{Bmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{Bmatrix}$$

$$\text{or } d\vec{u} = d\vec{u}_b + d\vec{\theta} \wedge \vec{u}_b \text{ soit sur la base } b : {}^b\{d\vec{u}\} = \begin{Bmatrix} du_r - u_\theta d\theta \\ du_\theta + u_r d\theta \\ du_z \end{Bmatrix}$$

En tenant compte de $u_\theta = 0$ et que u_r et u_z sont indépendant de θ nous obtenons par identification la matrice associée au tenseur gradient sur la base b :

$$[\overline{H}] = [\overline{\text{grad}(\vec{u})}] = \begin{bmatrix} u_{,r} & 0 & u_{,z} \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ w_{,r} & 0 & w_{,z} \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit en petites déformations : } \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 \\ 1/r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \text{ de la forme } [L]\{U\}$$

Si le matériau est homogène isotrope élastique nous utiliserons la loi de HOOKE pour exprimer la matrice d'élasticité $[D]$

$$\overline{\overline{\sigma}} = \lambda \text{trace}(\overline{\overline{\varepsilon}}) \overline{\overline{1}} + 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = E\nu / (1+\nu)(1-2\nu) \\ \mu = E / 2(1+\nu) \end{cases}$$

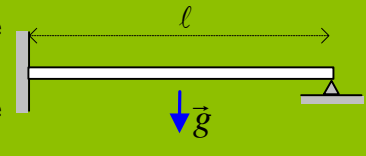
$$\text{d'où : } \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\}$$

Exercice IV-3: Formulation forte d'un problème de flexion

Objectifs : mettre en oeuvre de la méthode des résidus pondérés sur un problème de vibration simple.

Intéressons-nous aux vibrations transversales (flexion plane) de la poutre droite cylindrique de longueur ℓ représentée par la figure ci contre.

Elle est encastree à son extrémité gauche et repose sur un pivot à l'autre extrémité.

**Mise en équations - Construction d'une approximation.**

Écrivez le système d'équations différentielles régissant ce problème.

Montrer que $\varphi(x) = x^2(\ell - x)$ vérifie toutes les conditions aux limites en déplacement.

fonction cinématiquement admissible

On envisage des fonctions de la forme : $W(x) = P(x) \varphi(x)$

avec $P(x)$ polynôme de degré 1 puis de degré 2

Déterminer deux fonctions $P(x)$ satisfaisant toutes les conditions aux limites du problème.

Approximation à un paramètre.

Pour les 2 approximations à 1 paramètre dont la fonction de forme est un des 2 polynômes précédents

Déterminer l'équation du modèle "masse - ressort" obtenue par la méthode de Galerkin.

En déduire deux approximations de la première pulsation propre.

Comparez les résultats entre eux et avec la solution analytique *.

Qu'en pensez-vous ?

Approximation à deux paramètres.

Déterminer l'équation matricielle du modèle en utilisant l'approximation à deux paramètres construite sur les deux fonctions de forme polynomiale (méthode de Galerkin).

Comparer l'approximation des 2 premières fréquences obtenue avec cette approximation.

Posez les calculs, et utilisez MAPLE ou MATLAB pour les faire. Il est intéressant sur ce problème de comparer les déformées modales de la solution approchée et de la solution analytique.

La structure est maintenant placée dans le champ de pesanteur, déterminer la réponse statique dans le cadre de cette approximation à deux paramètres. Que pensez vous des résultats ?

* Les solutions analytiques de ces problèmes de flexion sont proposées sur le site « vibration » Nous donnons ci-dessous les 3 premières pulsations de résonance :

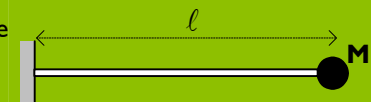
$$\omega_1^2 = 237,72 \frac{EI}{\rho S \ell^4}, \quad \omega_2^2 = 2496,5 \frac{EI}{\rho S \ell^4}, \quad \omega_3^2 = 10876,6 \frac{EI}{\rho S \ell^4}$$

Exercice IV-4: Formulation variationnelle d'un problème de flexion

Objectifs : mettre en oeuvre de la formulation variationnelle sur un problème de vibration.

Intéressons-nous aux vibrations transversales de la poutre droite de longueur ℓ représentée par la figure ci contre.

La masse **M** en bout de poutre est supposée ponctuelle..

**Mise en équations - Construction d'une approximation.**

Écrivez le système d'équations différentielles régissant ce problème.

Vérifier que les fonctions de forme $w_n(x) = 1 - \cos C_n x$ sont cinématiquement admissibles.

Déterminer la valeur de C_n pour que l'approximation satisfasse la condition de moment nul en ℓ .

Formulation variationnelle – forme matricielle.

Appliquez la méthode des résidus pondérés en transformant la forme intégrale par intégration par parties pour faire apparaître les conditions aux limites.

En déduire l'équation matricielle du modèle ainsi construit, pour une approximation à n paramètres de la forme :

$$v^*(x, t) = [w(x)]\{q(t)\}$$

Déterminer l'expression des coefficients des matrices masse et raideur.

Application numérique.

pour $M = \rho S \ell$

Comparez avec les résultats obtenus avec une approximation à un, puis deux paramètres et la solution analytique *.

Vous pouvez utiliser MAPLE ou MATLAB pour faire les calculs.

Application du Principe des Travaux Virtuels

Écrire la forme intégrale associée au PTV, et vérifier que les expressions matricielles sont identiques.

* Les 2 premières pulsations de résonance obtenue analytiquement sont:

$$\omega_1 = 1,557 \sqrt{\frac{EI}{\rho S \ell^4}} \quad , \quad \omega_2 = 16,25 \sqrt{\frac{EI}{\rho S \ell^4}}$$

IV-4 Petit quiz

Vous devez pouvoir justifier toutes vos réponses

Q1 :

De quelle nature sont les conditions aux limites dans la formulation différentielle « EDP » d'un problème de physique ?

Q2 :

Peut-on utiliser directement une approximation de la forme $u(M,t) = \sum_{i=1}^n W_i(M) q_i(t)$, dans la formulation forte d'un problème ?

Q3 :

Après transformation de la formulation forte du problème par intégration par parties, quelles sont les conditions aux limites restant à satisfaire par l'approximation ?

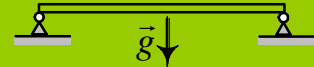
Q4 :

Quand dira-t-on qu'une approximation est cinématiquement admissible ?
Même question pour la pondération ?

Q5 :

Pouvez vous utiliser un ou plusieurs éléments finis poutre pour définir l'approximation dans la formulation forte du problème.

$$\forall \delta v \quad \int_0^\ell (\rho S \ddot{v} + EI v_{,x^4} - f) \delta v \, dx = 0$$



Une approximation de la forme $v = \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{\ell} x q_i$ convient-elle ?

Déterminer la solution statique approchée à un paramètre obtenue par collocation au centre de la poutre (pas de calcul).

Q6 :

Quelle est la différence essentielle entre une approximation par éléments finis et une approximation générale sur le domaine étudié ?

Q7 :

Soit la base de fonctions de forme $W_i(x) = x^i (1 - x/\ell)$.

Convient-elle pour construire une approximation admissible ?



Pouvez vous, avec cette base de fonction, utiliser la formulation forte du problème ?

Pourquoi un modèle éléments finis classique utilisant le même nombre de variables que cette approximation générale donnera toujours de moins bons résultats pour calculer la réponse dynamique de ce barreau.

Quel modèle élément fini barre permettrait de retrouver les mêmes résultats que l'approximation générale à 1 paramètre de ce problème ?

Rien ne vous empêche de discuter vos réponses avec votre enseignant.

Notes personnelles

Les éléments finis

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis sont les suivantes :

- Discrétisation du milieu continu en sous domaines.
- Construction de l'approximation nodale par sous domaine.
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.
- Assemblage des matrices élémentaires - Prise en compte des conditions aux limites.
- Résolution du système d'équations.

Détaillons ces différentes étapes.

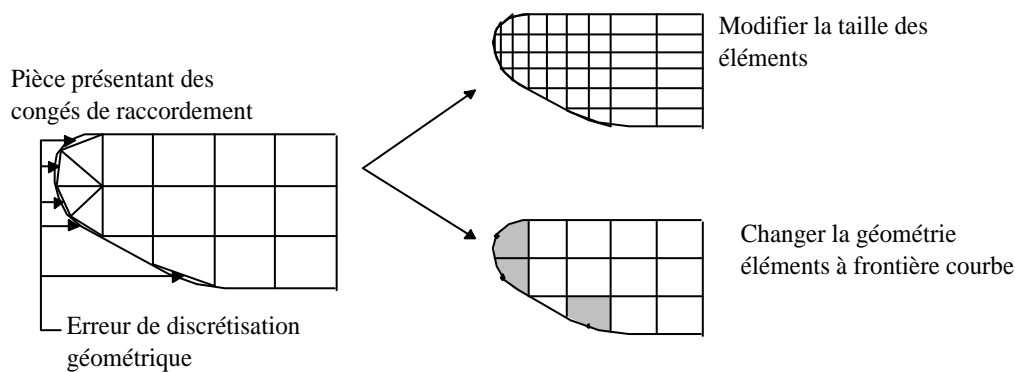
V-1 Discrétisation du milieu

V-1.1 Discrétisation géométrique

Cette opération consiste à décomposer le domaine continu en un nombre fini de sous domaines « éléments finis ».

$$D = \sum_{e=1}^{ne} D_e \quad \text{telle que} \quad \lim_{\text{taille des } e \rightarrow 0} \left(\bigcup_e D_e \right) = D$$

Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune. De plus lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette erreur doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés.



Erreur de discrétisation géométrique.

Les problèmes de l'ingénieur sont généralement complexes, des hypothèses simplificatrices sont donc nécessaires pour définir le cadre de l'étude, sans avoir à représenter la « réalité physique » dans toute sa complexité.

Les DAO des pièces complexes devront être simplifiées avant d'être calculés par éléments finis

V-1.2 Approximation nodale

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation u^* du champ des variables u par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux noeuds de l'élément. On parle de représentation nodale de l'approximation ou plus simplement d'approximation nodale.

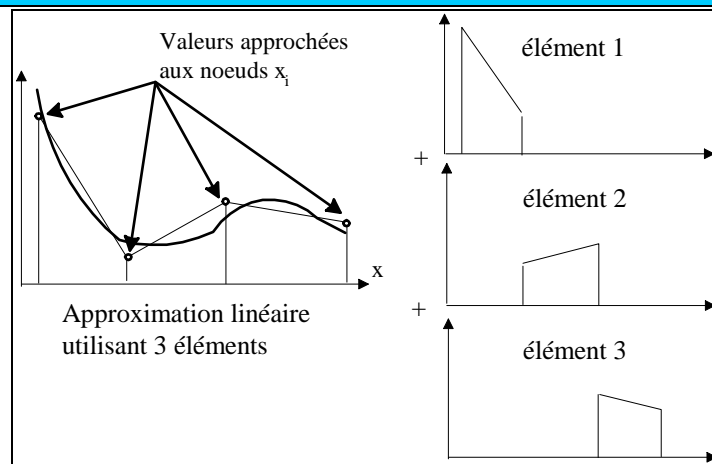
Définition : l'approximation par éléments finis est une **approximation nodale** par sous domaines ne faisant intervenir que les **variables nodales** du domaine élémentaire D_e .

$$\forall M \in D_e \quad \{u^*(M)\} = [N(M)] \{U_n\}$$

$\{u^*\}$ valeur de la fonction approchée en tout point M de l'élément

$[N]$ matrice des fonctions d'interpolation de l'élément

$\{U_n\}$ variables nodales relatives aux noeuds d'interpolation de l'élément



Approximation nodale linéaire à une dimension

Construction de l'approximation nodale

L'approximation nodale est construite à partir d'une approximation générale :

$$\forall M \quad u^*(M) = \langle \Phi(M) \rangle \{a\}$$

$\langle \Phi(M) \rangle$ est une base de fonctions connues indépendantes (en général une base polynomiale)

$\{a\}$ est le vecteur des n paramètres de l'approximation (paramètres généralisés)

Les n noeuds M_i sont des points de l'élément pour lesquels l'approximation u^* est identifiée à la valeur du champ de variables u .

$$\{U_n\} = \{u^*(M_n)\} = \langle \Phi(M_n) \rangle \{a\}$$

Inversons ces relations pour exprimer les paramètres généralisés $\{a\}$ en fonction des variables nodales $\{U_n\}$

$$\Rightarrow \{a\} = [T] \{U_n\} \text{ avec } [T] = \begin{bmatrix} \langle \dots \rangle \\ \langle \Phi(M_i) \rangle \\ \langle \dots \rangle \end{bmatrix}^{-1}$$

La matrice à inverser doit être bien conditionnée. Conditionnement lié au choix de la base polynomiale et à la géométrie des éléments.

En reportant ce résultat dans l'approximation, nous obtenons la matrice des fonctions d'interpolation.

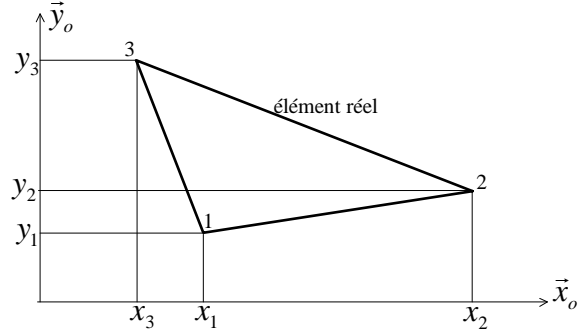
$$\langle N_{(M)} \rangle = \langle \Phi_{(M)} \rangle [T]$$

$$\text{Qui satisfont la propriété suivante } \forall M_i \quad N_{j(M_i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Illustration construction des fonctions d'interpolation d'un élément triangulaire quelconque

Soit un élément triangulaire à trois nœuds, nous avons trois variables nodales à identifier. Nous cherchons donc une approximation polynomiale linéaire de la forme :

$$u^*_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$



Identifions les valeurs nodales : $u^*_{(x_i, y_i)} = u_i$

$$\text{Nous obtenons la relation matricielle suivante : } \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Il est simple de vérifier que la relation inverse est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \Delta_{23} & \Delta_{31} & \Delta_{12} \\ y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{avec } \begin{cases} A = \text{aire du triangle} \\ x_{ij} = x_i - x_j \text{ et } y_{ij} = y_i - y_j \\ \Delta_{ij} = x_i y_j - x_j y_i \end{cases}$$

Reportons ce résultat dans l'approximation, nous obtenons :

$$u^*_{(x,y)} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{avec par permutation circulaire de } ijk$$

$$N_i = \frac{1}{2A} (\Delta_{jk} + x y_{jk} - y x_{jk})$$

Les calculs sont relativement long du fait de la forme quelconque de l'élément. En pratique les fonctions d'interpolation seront construites pour des éléments de référence possédant des propriétés géométriques permettant de simplifier ces calculs.

Éléments de référence

Un élément de référence est un élément de forme géométrique simple (frontières rectilignes, bords de longueur unité). Le passage de l'élément de référence à l'élément réel sera réalisé par une transformation géométrique. Pour un élément de référence, l'approximation nodale est construite en suivant la démarche analytique précédente.

Nous entendons par élément réel un élément quelconque du domaine discrétisé.

La majorité des éléments de référence sont construits sur une base polynomiale de degré 1 ou 2. Le nombre de variables nodales à identifier étant égal à la dimension de la base.

Bases polynomiales complètes:

1D:	linéaire	$[1, x]$	2 variables
	quadratique	$[1, x, x^2]$	3 variables
2D:	linéaire	$[1, x, y]$	3 variables
	quadratique	$[1, x, y, x^2, xy, y^2]$	6 variables
3D:	linéaire	$[1, x, y, z]$	4 variables
	quadratique	$[1, x, y, z, x^2, xy, y^2, xz, z^2, yz]$	10 variables

Bases polynomiales incomplètes:

2D:	"bi - linéaire"	$[1, x, y, xy]$	4 variables
3D:	"tri - linéaire"	$[1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz]$	8 variables

Deux grandes familles d'éléments sont souvent présentées

Les éléments de type Lagrange

Les éléments de type Hermite

Ce choix ne comporte que des monômes de degré 1, et respecte la symétrie des bases.

Pour les éléments de type Lagrange les variables nodales concernent uniquement le champ inconnu, alors que les variables nodales des éléments de type Hermite sont le champ et ses dérivées.

L'élément poutre présenté dans le chapitre III fait partie de la famille de l'Hermite.

Éléments à une dimension



C'est un segment de droite de longueur unité.

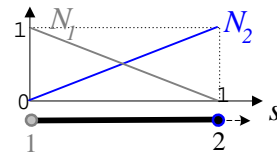
La variable de référence est $s \in [0, 1]$

Approximation linéaire

base polynomiale utilisée est $(1, s)$ → 2 nœuds

Les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{cases} N_1(s) = L_1 = 1 - s \\ N_2(s) = L_2 = s \end{cases}$$



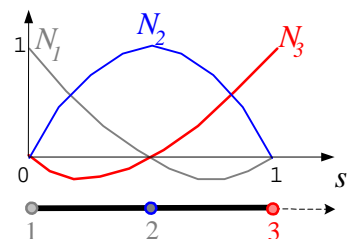
Approximation quadratique

Approximation $(1, s, s^2)$

→ 3 nœuds

Les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{cases} N_1(s) = L_1(2L_1 - 1) \\ N_2(s) = 4L_1L_2 \\ N_3(s) = L_2(2L_2 - 1) \end{cases}$$



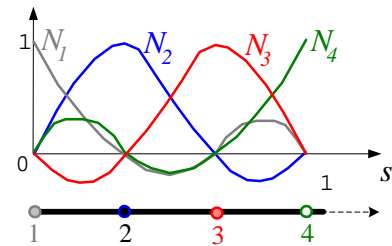
Approximation cubique

Approximation $(1, s, s^2, s^3)$

Pour l'élément à 4 nœuds (1 variable par nœud)

Les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{cases} N_1(s) = \frac{L_1}{2} (3L_1 - 1)(3L_1 - 2) \\ N_2(s) = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1) \\ N_3(s) = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_2 - 1) \\ N_4(s) = \frac{L_2}{2} (3L_2 - 1)(3L_2 - 2) \end{cases}$$



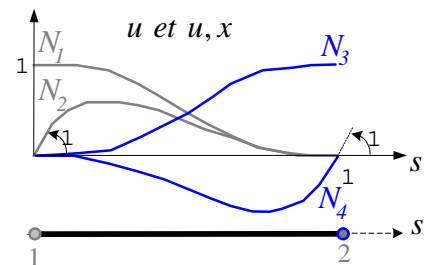
Pour l'élément à 2 nœuds (2 variables par nœud)

Le champ et sa dérivée (pente)

Les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{cases} N_1(s) = 1 - 3s^2 + 2s^3 \\ N_2(s) = s - 2s^2 + s^3 \\ N_3(s) = 3s^2 - 2s^3 \\ N_4(s) = -s^2 + s^3 \end{cases}$$

*Famille de l'Hermite
cf. élément poutre.*

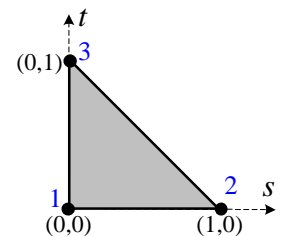


Éléments triangulaires

C'est un triangle rectangle de coté unité.

Les variables de référence sont

$$s \in [0, 1] \text{ et } t \in [0, 1 - s]$$



Approximation linéaire

Approximation $(1, s, t)$

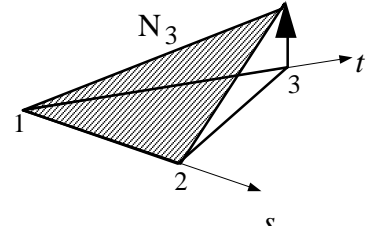
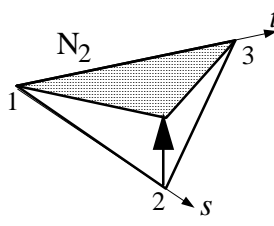
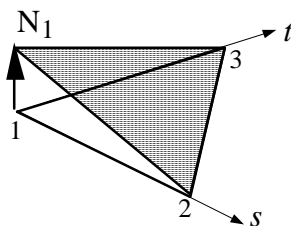
→ élément à 3 nœuds, triangle de type "T3".

Les fonctions d'interpolation sont :

$$N_1 = 1 - s - t$$

$$N_2 = s$$

$$N_3 = t$$



Approximation quadratique

Approximation $(1, s, t, st, s^2, t^2)$

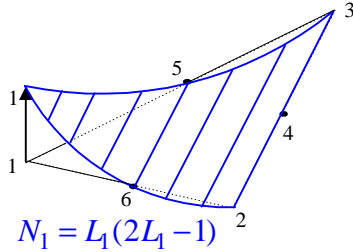
→ élément à 6 nœuds, triangle de type "T6".

On pose : $L_1 = 1 - s - t$, $L_2 = s$, $L_3 = t$

Les fonctions d'interpolation sont :

Pour les 3 nœuds sommet: $i = 1, 2, 3$

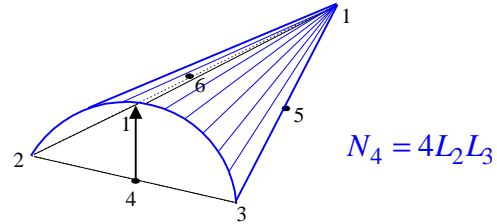
$$N_i = L_i(2L_i - 1)$$



Pour les 3 nœuds d'interface (4,5,6):

$i = 1, 2, 3$ avec $j \neq i, k$ et $k \neq i$

$$N_{i+3} = 4L_jL_k$$

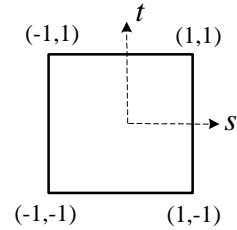


Éléments rectangulaires plans

L'élément de référence est un carré de coté 2

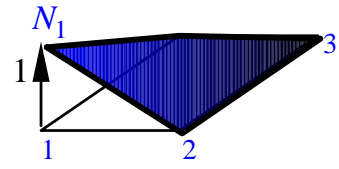
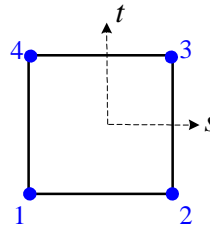
Les variables de référence sont $(s, t) \in [-1, 1]$

L'approximation



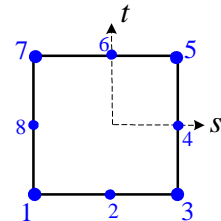
Approximation linéaire "Q4" $(1, s, t, st)$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1+s)(1-t) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1-s)(1+t) \end{cases}$$



Approximation quadratique "Q8" $(1, s, t, st, s^2, t^2, s^2t, t^2s)$

Pour éviter d'avoir des nœuds internes, on utilise des bases polynomiales incomplètes mais symétriques contenant tous les monômes d'un même degré.



Nous avons donné les fonctions d'interpolation des éléments les plus simples pour lesquels il est possible de faire un certain nombre de calculs analytiquement. Signalons que les expressions des fonctions d'interpolation de nombreux autres éléments de référence sont données dans le livre de Dhatt et Touzot "*Une présentation de la méthode des éléments finis*". Vous y trouverez aussi des exemples de programmes pour la construction systématique de ces fonctions d'interpolation.

V-2 Calcul des matrices élémentaires

Présentons maintenant les techniques numériques élémentaires (utilisées sur chaque élément) permettant de calculer les formes matricielles déduites de la formulation variationnelle (forme intégrale) d'un problème de physique. Dans un premier temps nous rappelons l'écriture matricielle de la forme variationnelle d'un problème de mécanique des structures, cette formulation est une des plus complexes car elle fait intervenir quatre champs « contraintes, déformations, forces et déplacements »

V-2.1 Formulation en mécanique des structures

La forme intégrale du PTV est :

$$\forall \delta \vec{u} \quad \int_{\mathcal{D}} \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} \, dV = - \int_{\mathcal{D}} \vec{\sigma} : \vec{\delta \epsilon} \, dV + \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, dV + \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{T} \cdot \delta \vec{u} \, dS$$

Pour chaque élément $\forall M \in D_e$

L'approximation nodale des déplacements :

$$\{\vec{u}(M)\} = [N(M)] \{U_e\}$$

Le champ des déformations

$$\{\epsilon(M)\} = [B(M)] \{U_e\} \quad \text{avec} \quad [B(M)] = [L][N(M)]$$

$[B]$: matrice d'opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolation

Le champ des contraintes

$$\{\sigma(M)\} = [D(M)] \{\epsilon(M)\} = [D(M)][B(M)] \{U_e\}$$

D'où le premier terme :

$$\int_{D_e} \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} \, dV = \{\delta U_e\}^T [M_e] \{\ddot{U}_e\}$$

$$\text{avec} \quad [M_e] = \int_{D_e} [N(M)]^T \rho [N(M)] \, dV \quad \text{matrice masse élémentaire.}$$

Le second terme :

$$\int_{D_e} \vec{\sigma} : \vec{\delta \epsilon} \, dV = \{\delta U_e\}^T [K_e] \{U_e\}$$

$$\text{avec} \quad [K_e] = \int_{D_e} [B(M)]^T [D(M)] [B(M)] \, dV \quad \text{matrice raideur élémentaire.}$$

Le travail virtuel des champs de force donnés sur l'élément

$$\delta T_{de} = \int_{D_e} \vec{f}_d \cdot \delta \vec{u} \, dV + \int_{\partial D_e} \vec{T}_d \cdot \delta \vec{u} \, dS$$

$$\delta T_{de} = \{\delta U_e\}^T \{F_{de}\}$$

$$\text{avec} \quad \{F_{de}\} = \int_{D_e} \langle N(M) \rangle^T \{\vec{f}_d\} \, dV + \int_{\partial D_e} \langle N(M) \rangle^T \{\vec{T}_d\} \, dS$$

→ Le PTV : $\forall D_e \quad [M_e] \{\ddot{u}_n\} + [K_e] \{u_n\} = \{F_{de}\} + \{F_{ie}\}$

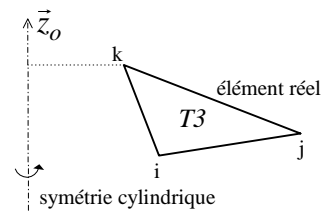
Les efforts inconnus représentent les actions mécaniques extérieures à l'élément considéré, on y trouve les efforts de liaison entre les éléments, et pour les éléments de frontière les efforts associés aux liaisons cinématiques de la structure.

Lors de l'assemblage des éléments d'une structure la somme des actions mécaniques « inter – élémentaire » est nulle. Il ne reste donc aux nœuds internes que les efforts donnés. Et aux nœuds de frontière les efforts de liaisons inconnus.

V-2.2 Application l'élément « T3 » axisymétrique

Soit une structure de symétrie cylindrique d'axe \vec{z} . Nous avons explicité (paragraphe IV-3.4) les opérateurs $[L]$ et $[D]$ dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad [L] = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 \\ 1/r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix}$$



L'approximation pour l'élément triangulaire à trois nœuds défini dans le repère (r, θ, z) est :

$$\{U\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad N_i = \frac{1}{2A} (\Delta_{jk} + r z_{jk} - z r_{jk})$$

De la forme $[N]\{U_e\}$

D'où la matrice $[B]$:

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} N_{1,r} & 0 & N_{2,r} & 0 & N_{3,r} & 0 \\ N_{1,r}/r & 0 & N_{2,r}/r & 0 & N_{3,r}/r & 0 \\ 0 & N_{1,z} & 0 & N_{2,z} & 0 & N_{3,z} \\ N_{1,z} & N_{1,r} & N_{2,z} & N_{2,r} & N_{3,z} & N_{3,r} \end{bmatrix}$$

Le calcul des matrices élémentaires de cet élément nécessite donc une dérivation puis une intégration sur le domaine élémentaire, pour lesquelles il faut avoir recours à des outils mathématiques (*MATLAB, MAPLE ou autres*). Le calcul analytique n'est possible que pour des éléments très simples tels que la barre et la poutre. Un code éléments finis a donc recours aux calculs numériques, basés sur l'utilisation des éléments de référence, l'utilisation d'une transformation géométrique pour définir les éléments réels, et l'intégration numérique pour calculer les coefficients des matrices.

Exercice V-1: EF-T3 pour calculer la température sur un carré

Objectifs : Effectuer les calculs au niveau élémentaire sans utiliser la notion d'élément de référence.

On se propose de résoudre de manière approchée un problème de thermique stationnaire 2D.

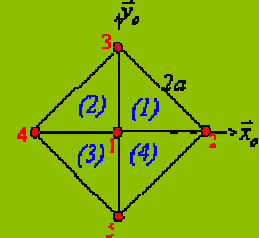
Le domaine étudié est un carré de côté $2a$ représenté par la figure ci contre.

La température dans le domaine est régie par le système d'équations suivant :

$$\Delta \theta = f \quad \text{sur } D$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur le contour de } D$$

f représente une densité de source de chaleur supposée uniforme sur le domaine.



Le modèle éléments finis que nous allons utiliser est représenté sur la figure.

Les éléments sont des éléments de type T3

Formulation

Rappeler la forme variationnelle du problème.

Simplifier l'équation intégrale en considérant que les conditions aux limites sur la frontière sont satisfaites.

Donner la forme matricielle correspondant à une approximation de cette équation intégrale.

Calcul de la matrice raideur élémentaire

L'objectif ici est d'établir l'expression des matrices élémentaires directement sur les éléments réels car la géométrie le permet. Pour éviter les calculs répétitifs, on se limitera au premier élément (l'élément 123).

Définir les fonctions d'interpolation sur le premier élément.

Déterminer la matrice raideur et le vecteur force généralisé associés à cet élément.

Montrer que pour les autres éléments les résultats sont identiques.

Résolution

Effectuez l'assemblage et calculez la température au centre du carré.

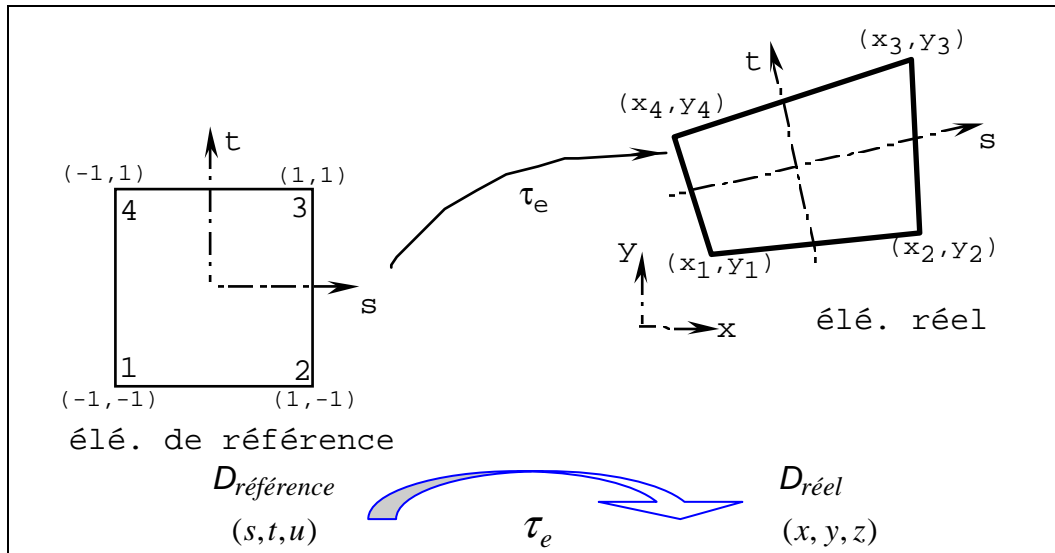
V-2.3 Techniques de calcul au niveau élémentaire

Ce paragraphe présente quelques aspects du calcul numérique, indispensables pour comprendre, lors de l'analyse de résultats, les erreurs numériques liées au maillage.

Transformation géométrique

Tout élément réel peut être défini comme l'image par une transformation géométrique d'un élément parent dit de référence pour lequel les fonctions d'interpolation sont connues.

La transformation géométrique définit les coordonnées (x, y, z) de tout point de l'élément réel à partir des coordonnées (s, t, u) du point correspondant de l'élément de référence. Un même élément de référence permet donc de générer toute une classe d'éléments réels. A chaque élément du domaine réel correspond une transformation bijective unique. Chaque transformation dépend des coordonnées des noeuds géométriques de l'élément réel. Pour les éléments les plus simples, la transformation utilise une base de fonctions polynomiales et sera identique pour chaque coordonnée.



En 3D la transformation géométrique est définie par :

$$\begin{cases} x = \langle N_g(s, t, u) \rangle \{x_n\} \\ y = \langle N_g(s, t, u) \rangle \{y_n\} \\ z = \langle N_g(s, t, u) \rangle \{z_n\} \end{cases}$$

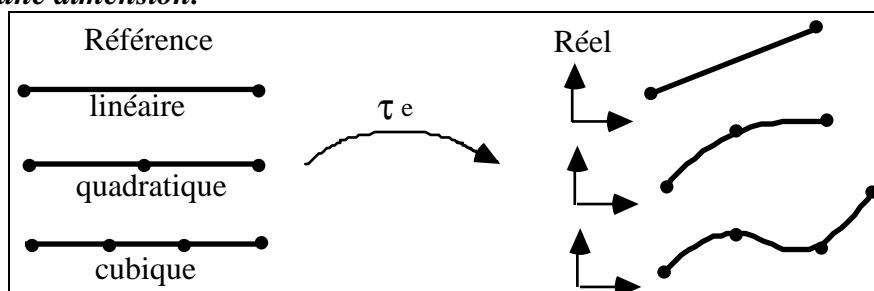
avec $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$
 $\langle N_g(s, t, u) \rangle$

coordonnées des noeuds de l'élément réel
fonctions de la transformation géométrique

Dans ce cours nous ne présentons que des « **éléments iso paramétriques** » Pour lesquels les noeuds d'interpolation et les noeuds géométriques sont confondus. Les fonctions de la transformation géométrique N_g seront identiques aux fonctions d'interpolation N .

Exemples d'éléments de référence classiques

Éléments à une dimension.

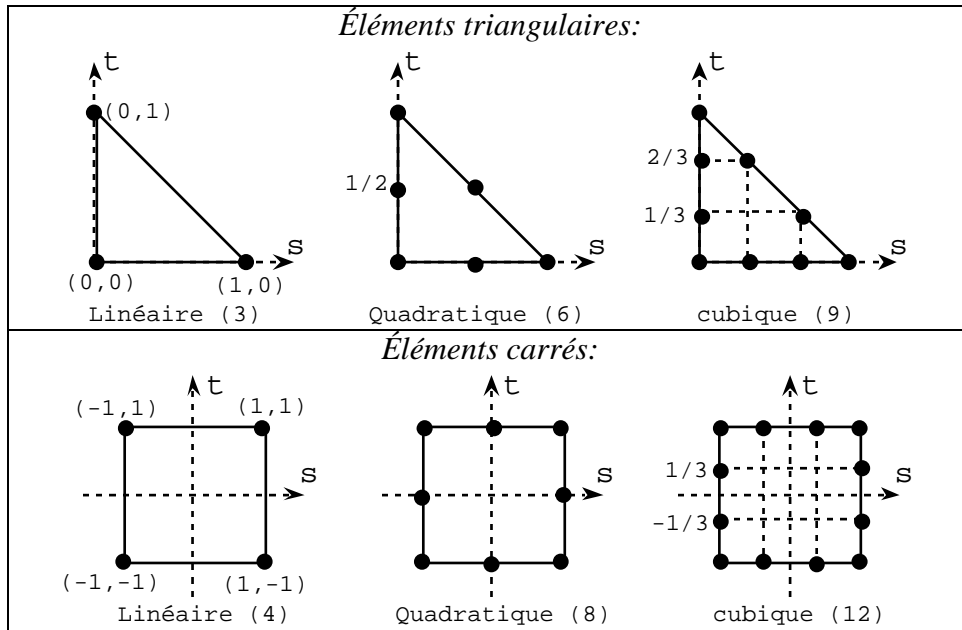


Transformations géométriques d'éléments à une dimension

Ces transformations géométriques utilisent les fonctions d'interpolation linéaire, quadratique et cubique définies plus haut.

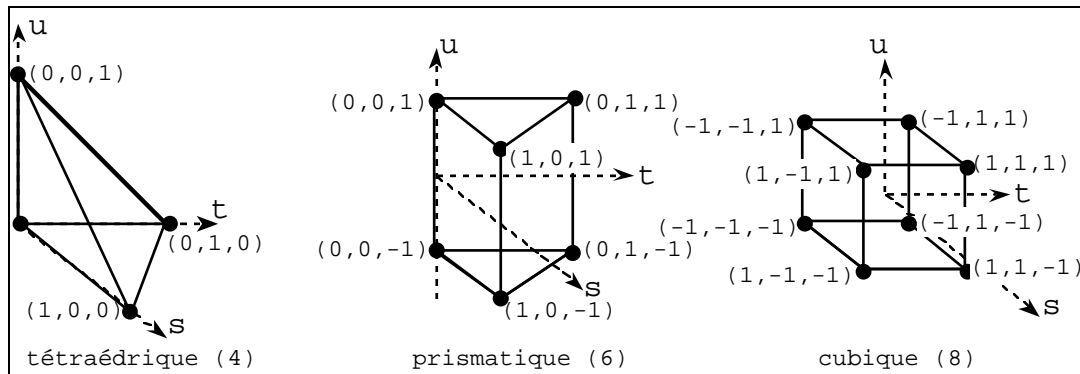
Éléments à deux dimensions.

Pour ces éléments les transformations géométriques conduisent respectivement à des frontières linéaires, quadratiques ou cubiques.



Éléments à trois dimensions.

Sur la figure suivante seul les nœuds sommets sont représentés. Pour les éléments quadratiques et cubiques les nœuds d'interface sont respectivement au milieu et au tiers des cotés.



Éléments volumiques à transformation linéaire

Matrice jacobienne - transformation des opérateurs de dérivation

Nous connaissons (savons calculer) les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées de l'élément de référence. (s, t, u) . Or il faut calculer les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées réelles (x, y, z) .

Posons :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

$[J]$ est la matrice jacobienne de la transformation

Compte tenu de l'expression de la transformation géométrique

$$\begin{cases} x = \langle N_g(s, t, u) \rangle \{x_n\} \\ y = \langle N_g(s, t, u) \rangle \{y_n\} \\ z = \langle N_g(s, t, u) \rangle \{z_n\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [J] = \begin{Bmatrix} \partial/\partial s \\ \partial/\partial t \\ \partial/\partial u \end{Bmatrix} \langle x \ y \ z \rangle = \begin{bmatrix} \partial \langle N_g \rangle / \partial s \\ \partial \langle N_g \rangle / \partial t \\ \partial \langle N_g \rangle / \partial u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x_n\} & \{y_n\} & \{z_n\} \end{bmatrix}$$

$[J]$ est le produit d'une matrice $(3, n)$ par une matrice $(n, 3)$ connues.

Pour chaque élément, cette matrice s'exprime en fonction des dérivées des fonctions de la transformation géométrique et des coordonnées des noeuds géométriques de l'élément réel.

La relation inverse permet alors de calculer les dérivées premières par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation.

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \partial/\partial s \\ \partial/\partial t \\ \partial/\partial u \end{Bmatrix}$$

La transformation devant être une bijection $[J]^{-1}$ est supposée exister

Une singularité de J peut apparaître lorsque l'élément réel est trop "distordu" par rapport à l'élément de référence « élément dit dégénéré ». De façon générale on évite lors du maillage d'utiliser des éléments trop disproportionnés, car ils nuisent à la précision numérique du modèle

De plus en plus de logiciel de pré-traitement proposent des outils de contrôle de la qualité du maillage basé sur la taille, les proportions et le calcul du Jacobien des éléments utilisés.

Pour le calcul des dérivées secondes $\partial^2/\partial x^2$ et $\partial^2/\partial x \partial y$ des fonctions d'interpolation (problèmes de flexion), la démarche est identique mais les calculs sont plus complexes, reportez vous au livre de D&T (pages 55-57).

Calcul numérique d'une intégrale

Le jacobien de la transformation géométrique permet de passer de l'intégration d'une fonction f définie sur l'élément réel à l'intégration sur l'élément de référence :

$$\int_{De} f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{Dref} f(s, t, u) |\det[J]| \, ds dt du$$

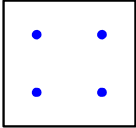
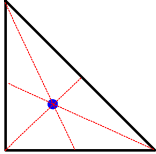
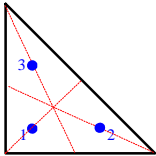
Cette dernière intégrale ne peut être évaluée analytiquement que dans des cas extrêmement simples. En général, la fonction à intégrer est une fraction rationnelle polynomiale compliquée. Le calcul de l'intégrale sur l'élément de référence est donc effectué numériquement.

Les formules d'intégration numérique permettent d'évaluer l'intégrale sous la forme générale suivante :

$$\int_{D_{ref}} f \, dv \cong \sum_{i=1}^{N_{pi}} f(\xi_i) \omega_i$$

où N_{pi} représente le nombre de points d'intégration sur l'élément de référence.
 ξ_i les coordonnées paramétriques des points d'intégration.
 ω_i les poids d'intégration.

Les schémas d'intégration les plus utilisés pour les éléments 2D sont :

	points	Coordonnées ξ_i		Poids ω_i
	4	$s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\omega = 1$
	1	$s = \frac{1}{3}$	$t = \frac{1}{3}$	$\omega = 1/6$
	3	$s = 1/6$ $s = 2/3$ $s = 1/6$	$t = 1/6$ $t = 1/6$ $t = 2/3$	$\omega = 1/6$

Vous trouverez dans le D&T (pages 280 à 300) les tableaux et les figures donnant la position et les poids d'intégration pour différents schémas d'intégration.

Organisation des calculs numériques

Nous avons trois calculs à effectuer au niveau élémentaire (calcul des structures)

matrice masse élémentaire: $[M_e] = \int_{D_{ref}} \langle N(\xi) \rangle^T \rho \langle N(\xi) \rangle |\det[J]| \, dv_{ref}$

matrice raideur élémentaire: $[K_e] = \int_{D_{ref}} [B(\xi)]^T [D] [B(\xi)] |\det[J]| \, dv_{ref}$

force généralisée $\{F_{de}\} = \int_{D_{ref}} \langle N(\xi) \rangle^T \{\vec{f}_d\} |\det[J]| \, dv_{ref}$

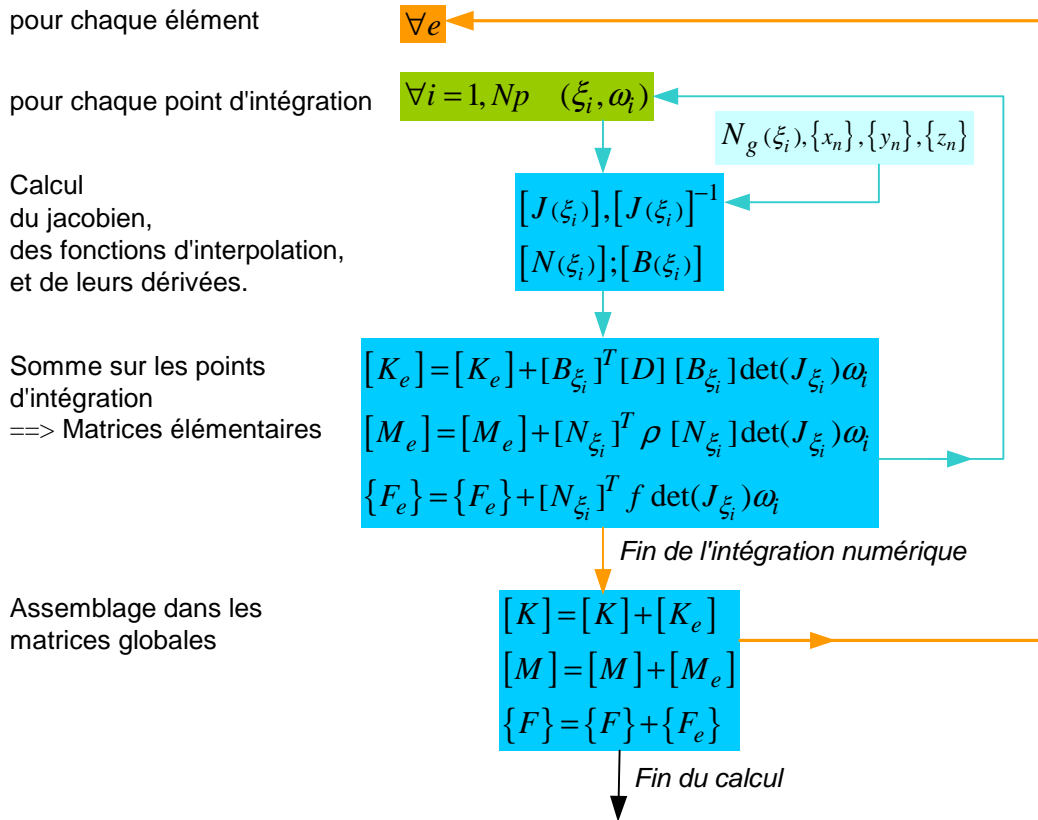
L'intégration numérique exacte n'est possible que si la fonction à intégrer est polynomiale. La matrice jacobienne doit être constante (l'élément réel garde la même forme que l'élément de référence). Nous connaissons alors l'ordre de la fonction polynomiale à intégrer, et nous pouvons choisir en conséquence le nombre de point d'intégration.

Dans le cas d'éléments réels de forme quelconque, la matrice jacobienne est une fonction polynomiale. Les termes à intégrer sont donc des fractions rationnelles, et la précision de l'intégration numérique diminue lorsque l'élément réel est mal conditionné (disproportionné)

La précision de l'intégration numérique dépend aussi du choix du nombre de points d'intégration, ce nombre est proposé par défaut (*affaire d'expérience*) dans les codes éléments finis. Pour les problèmes non linéaire en dynamique On utilise souvent un nombre de points

d'intégration plus faible pour diminuer les temps de calcul, mais attention si le nombre de points est insuffisant cela peut conduire à des résultats faux*.

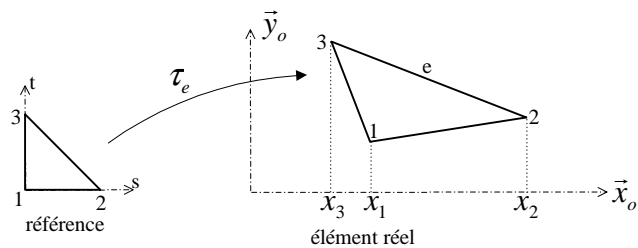
Organisation des calculs :



V-2.4 Application le « T3 » en élasticité plane

L'élément triangulaire à trois noeuds est un élément iso - paramétrique, dont les fonctions d'interpolation sont :

$$N_1 = 1 - s - t \quad N_2 = s \quad N_3 = t$$



Calculons la matrice jacobienne de cette transformation géométrique.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \langle N_g \rangle}{\partial s} & \frac{\partial \langle N_g \rangle}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x_n\} & \{y_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix}$$

Cette matrice est une constante

* Pour un problème de dynamique l'intégration réduite peut introduire des modes parasites (phénomènes d'hourglass)

Son inverse:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix}$$

A est l'aire de l'élément réel.

J = 2A est le jacobien de la transformation

Sachant que : $\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix}$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{1,x} \\ N_{1,y} \end{Bmatrix} &= J^{-1} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} -y_{31} + y_{21} \\ x_{31} - x_{21} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} y_{23} \\ x_{32} \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{Bmatrix} N_{2,x} \\ N_{2,y} \end{Bmatrix} &= J^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} y_{31} \\ -x_{31} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} N_{3,x} \\ N_{3,y} \end{Bmatrix} &= J^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} -y_{21} \\ x_{21} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} = [B] \{U_e\}$$

Il reste à reporter ces résultats dans l'expression de la matrice $[B(x, y)]$

avec $[B(x, y)] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow [B(s, t)] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

« e » Épaisseur supposée uniforme de l'élément.

Ces résultats sont ensuite utilisés pour le calcul des matrices élémentaires :

Matrice masse: $[M_e] = \int_{De} [N(x, y)]^T \rho [N(x, y)] dv = e \int_0^1 \int_0^{1-s} [N(s, t)]^T \rho [N(s, t)] 2A ds dt$

Les monômes à intégrer sont d'ordre ≤ 2

Matrice raideur: $[K_e] = \int_{De} [B(M)]^T [D(M)] [B(M)] dv = e \int_0^1 \int_0^{1-s} [B(s, t)]^T [D] [B(s, t)] 2A ds dt$

Les termes de cette matrice sont des constantes.

Dans le cas d'une charge de volume \vec{f}_d $\{F_{de}\} = e \int_0^1 \int_0^{1-s} [N(s, t)]^T \{\vec{f}_d\} 2A ds dt$

N'ayant que des polynômes à intégrer le calcul analytique ou numérique de ces matrices ne pose pas de problème, et il conduira à des résultats exacts qui pourront être réutilisés.

V-3 Assemblage et conditions aux limites

Les règles d'assemblage sont définies par la relation : $D \equiv \sum_{e=1}^{Ne} D_e$

$$\rightarrow \sum_{e=1}^{Ne} \{\delta U_e\}^T [M_e] \{\ddot{U}_e\} = \{\delta U\}^T [M] \{\ddot{U}\}$$

$$\sum_{e=1}^{Ne} \{\delta U_e\}^T [K_e] \{U_e\} = \{\delta U\}^T [K] \{U\}$$

et $\sum_{e=1}^{ne} \{\delta U_e\}^T \{F_{de}\} = \{\delta U\}^T \{F_d\}$

Il faut penser énergie ou travail virtuel pour effectuer la sommation des termes matriciels

Cette opération traduit simplement que l'énergie associée au domaine étudié est la somme des énergies élémentaires des sous domaines. Cela consiste à ranger dans une matrice globale les termes des matrices élémentaires. Le programme définira l'ordre des variables globales $\{U\}$ pour optimiser la place mémoire (disque) de la matrice globale, mais aussi le temps de calcul en fonction des algorithmes de résolution utilisés*. Deux méthodes classiques « matrices bandes » et « matrices ligne de ciel » sont présentées dans le livre de D&T.

Après assemblage, nous obtenons la forme matricielle du principe des travaux virtuels :

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{F_d\} + \{F_i\}$$

Soit N équations pour N+P inconnues. Pour résoudre, il faut tenir compte des P conditions aux limites cinématiques associées aux P composantes inconnues du vecteur $\{F_i\}$.

Pour simplifier les écritures nous présentons dans le cas d'un calcul statique les deux méthodes couramment utilisées pour tenir compte des conditions aux limites, la méthode directe et la méthode de pénalisation.

La méthode directe ou résolution par blocs, nécessite de modifier (réarranger) les termes des matrices (élimination de ligne - colonne). Elle est coûteuse en temps de calcul, on peut la présenter sous la forme suivante.

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{d1} \\ F_{d2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_i \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \{U_i\} = [K_{11}]^{-1} \{\{F_{d1}\} - [K_{12}]\{U_d\}\} \\ \{F_i\} = [K_{21}]\{U_i\} + [K_{22}]\{U_d\} - \{F_{d2}\} \end{cases}$$

Dans le cas particulier ou $\{U_d\} = \{0\}$ seul les termes de $[K_{11}]$ et $[K_{21}]$ sont utiles

$$\text{En effet } \begin{cases} \{U_i\} = [K_{11}]^{-1} \{F_{d1}\} \\ \{F_i\} = [K_{21}]\{U_i\} - \{F_{d2}\} \end{cases}$$

* Le choix de l'algorithme d'assemblage est un problème numérique & informatique. Les algorithmes dépendent de la taille du système matriciel, de la nature du problème (dynamique, statique, linéaire, non linéaire, etc...), de la machine utilisée (place mémoire disponible, espace de stockage, parallélisme,).

La méthode de pénalisation

Pour chaque relation $u_i = u_{di}$,

ajoutons un terme α très grand au terme K_{ii} , et remplaçons F_i par αu_{di}

L'équation i s'écrit : $\alpha u_i + \sum_{j=1}^n K_{ij} u_j = \alpha u_{di}$ et admet comme solution $u_i \cong u_{di}$

En pratique on prendra $\alpha = 10^{14} \text{Max}(K_{ij})$

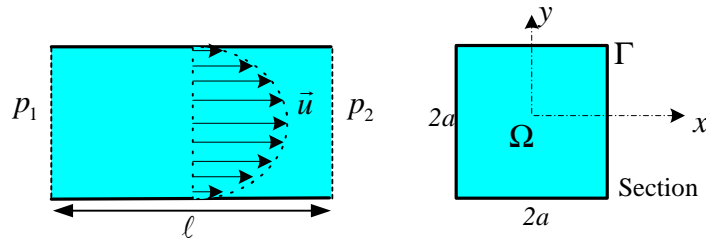
Cette méthode très simple et très rapide de mise en œuvre pose cependant des problèmes pour les systèmes mal conditionnés.

Nous n'aborderons pas ici les méthodes numériques de résolution de ces équations matricielles. Ces méthodes sont vues en analyse Numérique. Pour les problèmes de statique vous trouverez dans les codes EF deux types de méthodes

- Les méthodes directes : Élimination de Gauss, décomposition LDU, ou Cholesky ...
- Les méthodes itératives de type Gauss-Seidel.

V-4 Application au problème d'écoulement stationnaire

Nous allons appliquer la méthode des éléments finis pour modéliser le problème d'écoulement fluide présenté précédemment. Nous utiliserons des éléments triangulaires « T3 » pour lesquels nous pouvons effectuer tous les calculs analytiquement.



La formulation variationnelle de ce problème ([paragraphe IV-2.2](#)) :

$$\forall P \quad \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} P \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u^* \, dS - \int_{\Gamma} P \frac{\partial u^*}{\partial n} \, ds = - \int_{\Omega} P \frac{\pi}{\mu} \, dS$$

et sa forme matricielle associée : $[L]\{q\} = \{F_d\} + \{F_i\}$

Inconnues associées aux conditions aux limites sur u

avec $[L] = \int_{\Omega} [B]^T [B] \, dS$ où $[B] = [\overrightarrow{\text{grad}} W]$,

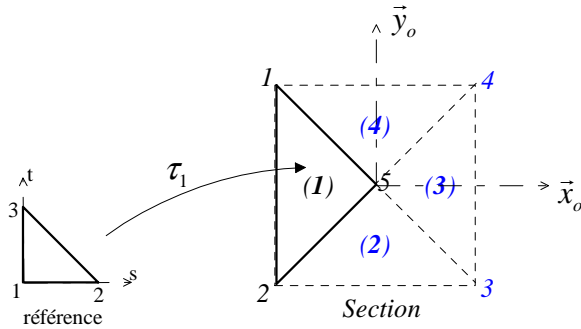
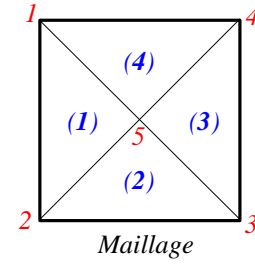
$$\{F\} = - \frac{\pi}{\mu} \int_{\Omega} P \, dS$$

Traisons maintenant ce problème par éléments finis, la section droite étant discrétisée par 4 triangles. Pour chaque élément nous avons :

$$\forall e \quad [K_e] = \mu \int_{D_e} [B_e]^T [B_e] dS \quad \{F_e\} = -\pi \int_{D_e} [N_e]^T dS$$

la figure ci-contre représente le maillage de la section droite (numérotation des éléments et des nœuds). Pour calculer les matrices élémentaires nous utilisons l'élément de référence du « T3 »

Pour le premier élément du maillage, la transformation géométrique est définie par la figure suivante :



Rappel :
Pour l'élément de référence

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - s - t \\ N_2 &= s \\ N_3 &= t \end{aligned}$$

La matrice jacobienne de τ_1 : (élément 1,2,5)

$$[J_1] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & a \\ -a & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2a \\ a & -a \end{bmatrix} \rightarrow \det(J_1) = 2a^2$$

$$\text{D'où } [J_1]^{-1} = \frac{1}{2a^2} \begin{bmatrix} -a & 2a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $[B_1(s,t)]$ est définie par

$$[B_1] = [J_1]^{-1} \begin{Bmatrix} \partial/\partial s \\ \partial/\partial t \end{Bmatrix} = [J_1]^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Le produit } [B_1]^T [B_1] = \frac{1}{2a^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons intégrer analytiquement :

$$[K_1] = \mu \int_0^{1-s} \int_0^t [B_1]^T [B_1] 2a^2 dt ds = \frac{\mu}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Le vecteur force généralisé associé à $f = -\pi$

$$\{F_1\} = \int_0^{1-s} \int_0^t [N(s,t)]^T f 2a^2 dt ds = 2a^2 f \int_0^{1-s} \int_0^t \begin{Bmatrix} 1-s-t \\ s \\ t \end{Bmatrix} dt ds = -\frac{a^2 \pi}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Vérifions la surface de cet élément :

$$S_1 = \int_0^{1-s} \int_0^t 2a^2 dt ds = a^2$$

C'est une constante car l'approximation élémentaire est linéaire

Pour les 3 autres éléments

Élément 1 : $[K_1]$ et $\{F_1\}$ sur $\langle u_1 \quad u_2 \quad u_5 \rangle$

élément 2 : $[K_2]$ et $\{F_2\}$ sur $\langle u_2 \quad u_3 \quad u_5 \rangle$

élément 3 : $[K_3]$ et $\{F_3\}$ sur $\langle u_3 \quad u_4 \quad u_5 \rangle$

élément 4 : $[K_4]$ et $\{F_4\}$ sur $\langle u_4 \quad u_1 \quad u_5 \rangle$

Effectuez un des calculs, et vérifiez que les matrices élémentaire raideur et force sont toutes identiques.

Assemblage et conditions aux limites.

Sur $\{U\}^T = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \rangle$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{1+4} & k_1 & 0 & k_4 & k_{1+4} \\ k_1 & k_{1+2} & k_2 & 0 & k_{1+2} \\ 0 & k_2 & k_{2+3} & k_3 & k_{2+3} \\ k_4 & 0 & k_3 & k_{3+4} & k_{3+4} \\ k_{1+4} & k_{1+2} & k_{2+3} & k_{3+4} & k_{1+2+3+4} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\{F_d\} = \begin{Bmatrix} f_{1+4} \\ f_{1+2} \\ f_{2+3} \\ f_{3+4} \\ f_{1+2+3+4} \end{Bmatrix} = -\frac{a^2 \pi}{3} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix}, \quad \text{et} \quad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Efforts Inconnus associés aux vitesses d'écoulement nulles

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$$

La dernière équation nous donne $u_5 = -\frac{a^2 \pi}{3\mu}$

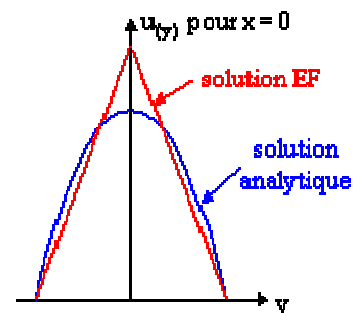
Unités : $\mu = \left[\frac{N}{m.s^{-1}} \right]$
 $\pi = [Pa] = \left[\frac{N}{m^2} \right]$

On en déduit les efforts nodaux inconnus $f_i = a^2 \pi$

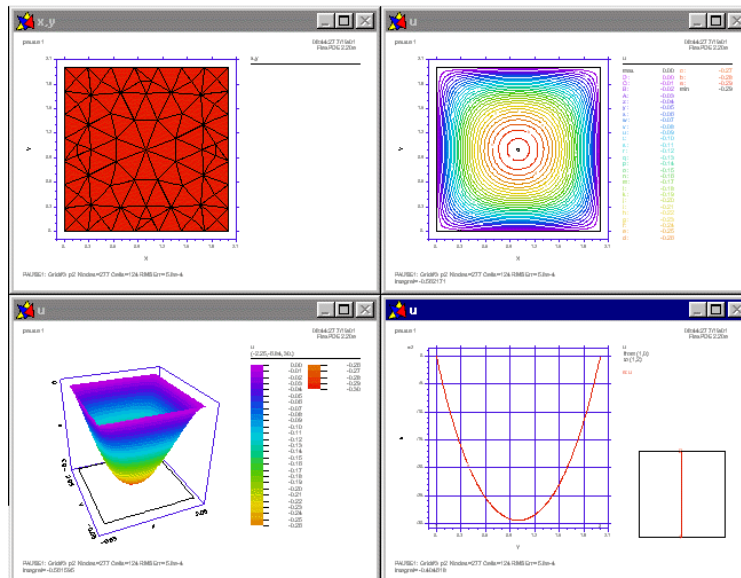
Rappel au centre de la conduite la vitesse du fluide « analytique » $= -0,2947 \frac{\pi a^2}{\mu}$

La figure ci-contre représente l'évolution du champ des vitesses dans la section centrale de la conduite.

Compte tenu de la discrétisation utilisée nous n'espérons pas obtenir une solution satisfaisante avec des éléments de type « T3 » car la solution approchée est basée sur une approximation linéaire sur chaque élément du champ des vitesses.



La figure ci-dessous présente une amélioration possible de la solution en affinant simplement le maillage en « T3 ».



Résultats avec le logiciel FlexPDE
<http://www.pdesolutions.com/>

title "conduite"

Variables

u {u variable}

definitions

f = 1 {chute de pression}

equations

div(grad(u)) - f = 0 {equation}

boundaries {domaine et des CL}

Region 1 'carre'

start (0,0) value(u)=0 line to(2,0) to(2,2)

to(0,2) to finish

plots {sorties graphiques}

grid(x,y) {maillage}

contour(u) {solution}

surface(u) {sous forme d'une surface}

elevation(u) from (1,0) to (1,2) {courbe}

end

Jeu de données

Exercice V-2 : EF-T3 pour l'élasticité plane

Objectifs : Assimiler les techniques de calcul au niveau élémentaire mise en œuvre dans un modèle éléments finis pour un problème de mécanique.

La structure et le modèle éléments finis à utiliser sont représentés sur la figure ci-dessous.

La structure à étudier est une plaque mince homogène isotrope chargée dans son plan. Nous utiliserons donc le modèle des contraintes planes pour représenter l'état de contrainte réel dans la structure. Les conditions aux limites et le modèle éléments finis que nous allons utiliser sont représentés sur la figure ci-contre. Les éléments sont des éléments de type T3 présenté dans le cours.

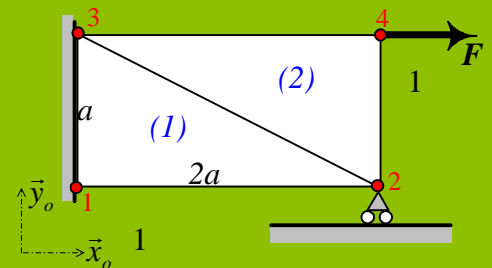
Formulation

Rappeler la forme variationnelle du problème.

Donner la forme vectorielle de la loi de comportement.

Exprimer la matrice reliant le vecteur des déformations et les déplacements nodaux d'un élément.

Utilisez ces calculs pour donner l'expression matricielle de la matrice raideur élémentaire.



Calcul de la matrice raideur élémentaire

Nous voulons utiliser l'élément de référence T3 pour effectuer les calculs en suivant les étapes d'un code éléments finis. On se limitera au premier élément pour éviter les calculs répétitifs.

Exprimez la matrice jacobienne de la transformation géométrique du premier élément.

Calculer les dérivées des fonctions d'interpolation sur l'élément réel $N_{i,x}$ et $N_{i,y}$

Donnez l'expression matricielle permettant de calculer la matrice raideur du premier élément.

Calcul de l'état de contrainte sur les éléments

La solution en déplacement est supposée connue.

Donner l'expression du vecteur des contraintes pour les deux éléments du modèle.

Vous exprimerez ces vecteurs en fonction des déplacements nodaux.

Comparer les expressions.

V-5 Petit quiz

Vous devez pouvoir justifier toutes vos réponses

Q1 :

Comment passe-t-on d'une approximation à base polynomiale aux fonctions d'interpolation d'un élément fini ?

Q2 :

Les fonctions d'interpolation des éléments finis ont une propriété essentielle, laquelle ?

Q3 :

Quels sont les monômes de la base polynomiale d'un élément de type Q4 ?

De type Q8 ?

Ces bases sont-elles complètes ?

Q4 :

Pourquoi utiliser des éléments de référence ? (citez au moins deux raisons)

Q5 :

Quelles sont les informations nécessaires pour calculer la transformation géométrique d'un élément de référence à un élément du domaine réel ?

Quel opérateur caractérise une transformation géométrique ?

Q6 :

Le jacobien « $\det(J)$ » de la transformation peut-il changer de signe sur un élément ?

Q7 :

Ecrivez la formule d'intégration permettant d'utiliser les éléments de référence ?

Comment est effectuée cette intégration ?

Q8 :

Citez deux méthodes de stockage des matrices globales ?

Q9 :

Soit l'équation matricielle suivante (dynamique des structures) avant l'introduction des « p » conditions aux limites cinématique

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{F_d\} + \{F_i\} \quad (n \text{ équations})$$

Que vérifie la matrice raideur ?

Combien d'inconnues pour ces n équations ?

Rien ne vous empêche de discuter vos réponses avec votre enseignant.

Notes personnelles

Utilisation d'un logiciel éléments finis

Un programme général de type industriel doit être capable de résoudre des problèmes variés de grandes tailles (de mille à plusieurs centaines de milliers de variables). Ces programmes complexes nécessitent une bonne maîtrise, de l'analyse du problème et des résultats obtenus, avant d'espérer pouvoir modéliser un problème réel de façon correcte.

Les possibilités offertes par de tels logiciels sont nombreuses

- Analyse linéaire ou non d'un système physique continu,
- Analyse statique ou dynamique,
- Prise en compte de lois de comportement complexes,
- Prise en compte de phénomènes divers (élasticité, thermiques, électromagnétiques, de plasticité, d'écoulement, etc. ...) ceux-ci pouvant être couplés,
- Problèmes d'optimisation,
- etc.

et ils ne cessent de se développer !

L'utilisation de tels logiciels nécessite une formation de base minimum. La mise en œuvre pratique sur des cas tests (si possible simples) permettront de savoir comment modéliser et analyser différents éléments d'un problème plus complexe. Avant de passer à la pratique, précisons comment se déroule une étude basée sur l'utilisation d'un logiciel éléments finis.

VI-1 Déroulement d'une étude

Pour réaliser une étude par éléments finis, il faut que **les objectifs de l'étude soient bien définis** (statique ou dynamique, élastique ou plastique, thermique, le type de matériaux, les charges appliquées ...). Le cadre de l'étude, c'est à dire le temps et les moyens disponibles, doit être compatible avec les objectifs et la précision cherchée.

Supposons ces conditions remplies (ce qui est rarement le cas), l'étude est organisée de façon logique selon les étapes suivantes.

VI-1.1 Analyse du problème:

Cette analyse conduit à préciser, un certain nombre d'hypothèses (choix qui conditionnent les résultats). Basée sur l'expérience personnelle, elle dépend de nombreuses considérations. La difficulté essentielle est de trouver un bon compromis entre les paramètres propres au problème et ceux relatifs à l'environnement de travail (liés à la connaissance du logiciel).

Choix du modèle: En calcul des structures, les plus classiques sont de type : poutre, élasticité plane, axisymétrique, coques mince ou épaisse, tridimensionnel, ... à ces modèles mathématiques correspondent des familles d'éléments finis.

Choix du type d'éléments: On choisira les éléments les mieux adaptés dans les familles disponibles, en fonction de la précision voulue, de la nature du problème, mais aussi du temps disponible, et de la connaissance de ces éléments.

Choix du maillage: Il dépend essentiellement des outils dont on dispose pour réaliser ce maillage. Il faut tenir compte de la géométrie (simplification de la DAO), des sollicitations extérieures (prévoir les surfaces, lignes, points de chargement), des conditions aux limites à imposer, mais aussi des informations recherchées locales ou globales.

Hypothèses de comportement: Quel modèle retenir pour représenter le comportement du matériau.

Faut-il effectuer le calcul en élastique linéaire, élastoplastique, viscoplastique ?

Comment modéliser les liaisons, les contacts, les jeux ?

Peut-on utiliser une méthode d'homogénéisation (matériau hétérogène ou composite) ?

Peut-on traduire l'incompressibilité d'un milieu (modélisation du caoutchouc) ?

Si pour réaliser l'étude il faut utiliser des éléments finis nouveaux (inconnus de l'utilisateur). Il est indispensable de vérifier leur comportement sur des problèmes élémentaires, si possible proches de l'étude menée. L'ouvrage suivant "*Guide de validation des progiciels de calculs des structures, AFNOR technique 1990*", présente des cas tests pour de nombreux problèmes, pouvant servir pour comparer la solution obtenue avec d'autres solutions numériques ou analytiques. Ce travail préliminaire utile pour former sa propre expérience, permet en plus de valider l'utilisation du logiciel.

VI-1.2 Création et vérification des données:

Cette étape dépend essentiellement du logiciel utilisé pour définir le jeu de données. Des exemples de formation « tutoriaux » et la documentation du bloc fonctionnel correspondant, vous permettront de vous familiariser avec la syntaxe utilisée pour définir le jeu de données. La création et les vérifications relatives au jeu de données se font généralement graphiquement, grâce à un module informatique appelé **pré-processeur**. En sortie, un fichier est créé, qui contient toutes les informations nécessaires à l'exécution des calculs.

Des logiciels tel que HyperMesh sont spécialisés pour faciliter cette étape qui, sur les problèmes complexes, est longue et fastidieuse. Ces logiciels permettent de récupérer des DAO, de les « réparer, transformer », et de préparer un jeu de données ; et cela en fonction du logiciel de calcul que l'on souhaite utiliser. Ce sont des outils puissants qui nécessitent un temps d'apprentissage pour connaître les différentes fonctionnalités. Nous utiliserons peu ces logiciels, dans le cadre de votre formation ingénieur, car nos objectifs sont différents. Nous visons la compréhension physique de problèmes plus simples, la somme de ces connaissances devant vous permettre d'aborder plus tard la complexité dans le cadre industriel.

Différents contrôles peuvent être utilisés pour valider le jeu de données :

- Vérification de la géométrie de la pièce et du maillage. Le bon sens et l'expérience acquise vous guideront pour vérifier à l'œil que votre maillage n'est pas aberrant.
- Vérification de la prise en compte des sollicitations et des conditions cinématiques imposées à la structure.
- Vérification des propriétés mécaniques utilisées.

L'objectif de ces premiers contrôles est d'éviter les calculs inutiles. D'autant plus que la recherche d'une solution acceptable pour un problème donné est rarement le résultat d'un seul calcul !

VI-1.3 Exécution du calcul:

Ce bloc, le plus coûteux en temps machine est souvent exécuté en tâche de fond. Un fichier de résultats permet généralement de vérifier que les différentes phases de calculs se sont correctement déroulées :

- Interprétation des données, vérification des paramètres manquants
- Construction des matrices (espace utile pour les gros problèmes)
- Singularité de la matrice raideur (problème de Conditions aux limites ou de définition des éléments)
- Convergence, nombre d'itérations, etc ...

Ce fichier peut éventuellement contenir les résultats du calcul (déplacements, résidus, contraintes,...) ce qui lui confère dans ce cas un volume généralement très important.

Il peut arriver que le calcul échoue. Les principales sources d'erreurs, généralement observées à ce niveau, sont les suivantes:

"erreurs"	"causes"	"remèdes"
Singularité de [K]	éléments mal définis, existence de modes rigides, intégration numérique.	modifier la topologie du maillage, modifier les liaisons, modifier le nombre de points d'intégration.
Résolution des équations	Arrondi numérique, Non convergence.	travailler en double précision, changer d'algorithme, augmenter le nombre d'itérations.

VI-1.4 Exploitation des résultats:

Les calculs demandés dans le cahier des charges ont le plus souvent pour objectif de valider ou de vérifier le dimensionnement d'une structure.

Les résultats obtenus et les conclusions relatives aux phénomènes à étudier devront être présentés de façon synthétique: tableaux, courbes, visualisation.

Cela justifie largement l'utilisation d'un post-processeur, qui propose des outils pour sélectionner les informations que l'on veut étudier.

- Valeur moyenne sur un élément : **Comment est-elle définie?**
- Valeur maximale sur l'élément : **Comment est-elle calculée?**
- Valeurs aux noeuds et écarts entre les éléments : **A quoi correspondent-elles?**
- Les courbes d'iso contraintes : **ont-elles une signification?**
- etc. ...

Attention: lors de l'utilisation de ces outils, il faut savoir (donc se poser la question) ce que représente (ou cache) l'information qui vous est proposée graphiquement. Celle-ci est construite (calculée) à partir de résultats discrets :

Différentes vérifications doivent être effectuées pour valider les résultats. Ces vérifications entraînent dans la plupart des cas à remettre en cause le modèle pour en créer un nouveau, dont on espère qu'il améliorera la solution précédente.

Pour valider une solution, il faut procéder dans l'ordre

- **dans un premier temps, estimer la précision du modèle.**
- **Puis procéder à sa validation.** Vérification (et remise en cause) des hypothèses du modèle.

Les indicateurs sur la précision du modèle sont généralement locaux, ils concernent des informations élémentaires calculées aux noeuds ou aux points d'intégration. Or ces informations sont souvent extrapolées ou lissées pour être représentées en valeur moyenne sur l'élément ou en courbe d'iso – valeurs sur le domaine.

Les indicateurs locaux sur la précision d'un modèle mécanique peuvent être :

- Discontinuité des contraintes entre des éléments adjacents. Le plus simple, pour un matériau isotrope, est de visualiser la contrainte équivalente de Von Mises, cela permet d'avoir une idée des zones fortement chargées et ayant un fort gradient de contrainte. Ces zones seront l'objet de toute notre attention.
- Valeur du tenseur des contraintes sur les bords libres ou chargés (certaines valeurs sont alors connues). En pratique il faudra estimer ces valeurs à partir des valeurs obtenues aux points d'intégration.
- Densité d'énergie interne de déformation sur chaque élément, l'idéal étant d'avoir un écart le plus faible possible.

Ayant quantifié la qualité de la solution numérique (précision), différents contrôles vous permettront de valider votre modèle :

- Ordre de grandeur des résultats obtenus
- Vérification des hypothèses du modèle*
 - * Par exemple en élasticité linéaire il faut vérifier que l'amplitude des déplacements reste faible par rapport aux dimensions de la structure, que les déformations et les contraintes observées respectent les hypothèses de linéarité de la loi de comportement.
- Que les choix de départ sont justifiés.

La comparaison et l'analyse des résultats des différentes modélisations que vous aurez réalisées, vous permettra d'améliorer puis de valider un modèle "final" fiable. L'étude menée vous amènera à conclure sur l'adéquation entre la structure et le cahier des charges.

La synthèse de ces calculs préliminaires est indispensable car elle vous permet de justifier et de définir les limites (du ou) des modèles retenus.

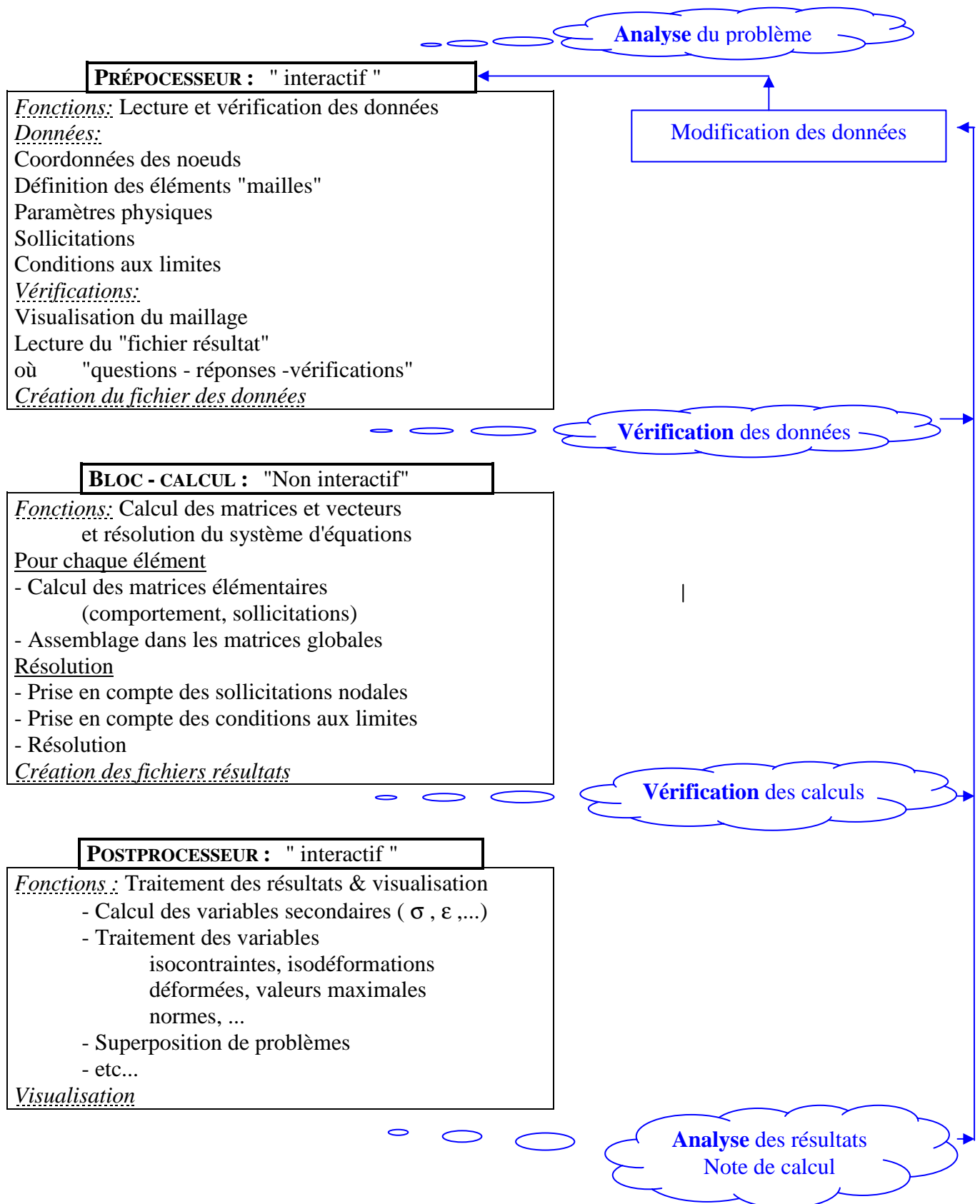
VI-2 Organigramme d'un logiciel éléments finis

Dans le cadre des projets vous aurez à utiliser un code de calcul industriel. Il faudra formaliser votre analyse du problème, en précisant les choix explicites ou implicites de votre modèle. Puis à partir des simulations numériques, valider la discrétisation du modèle, et analyser les résultats de l'étude. Le rapport fera la synthèse de vos calculs et présentera vos conclusions.

Tout logiciel de calcul par la méthode des éléments finis contient les étapes caractéristiques ou blocs fonctionnels suivants :

LOGICIEL

UTILISATEUR



VI-2 Petit quiz

Vous devez pouvoir justifier toutes vos réponses

Q1 :

Quelle est la différence entre erreur de modélisation et erreur de discrétisation ?

Q2 :

Quelles sont les principales sources de l'erreur de modélisation ?

Q3 :

Pouvez-vous évaluer l'erreur de modélisation à partir d'un résultat numérique ?

Comment procédez vous pour évaluer cette erreur ?

Q4 :

Quelles sont les principales sources de l'erreur de discrétisation ?

Q5 :

Comment évaluez-vous l'erreur de discrétisation à partir d'un résultat numérique ?

Q6 :

Après un premier calcul, la déformée de la structure est visiblement absurde. Quelles sont les premières vérifications que vous effectuez sur les données de votre problème ?

Q7 :

Sur quel champ pouvez vous qualifier graphiquement l'erreur de discrétisation ?

Quel critère numérique pouvez-vous utiliser pour quantifier cette erreur ?

Q8 :

Pour une structure en acier, vous obtenez une contrainte moyenne de Von Mises de 350 MPa sur l'élément fini où est introduit un appui ponctuel

Que pensez vous de cette valeur ?

Peut-on améliorer le modèle ?

Si oui, comment ?

Q9 :

Pouvez vous introduire une charge répartie (pression) directement en forces nodales sur les nœuds du maillage ?

Si oui, à quelles conditions ?

Quel type d'erreur commettez-vous ?

Pouvez vous l'estimer ?

Rien ne vous empêche de discuter vos réponses avec votre enseignant.

Notes personnelles