1. Ensembles, applications, relations

1.1. Exercices 1 à 10 :
Opérations sur les parties d'un ensemble

1.2. Exercices 1 à 10 :
Applications

1.3. Exercices 1 à 13 :
Applications, relations d'ordre

1.4. Exercices 1 à 12 :
Relations d'équivalence

1.1. Opérations sur les parties d'un ensemble

Exercice 1.1.1

Montrer que l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.1.2

On considère une famille finie d'ensembles distincts deux à deux.

Montrer que l'un au moins de ces ensembles ne contient aucun des autres.

Exercice 1.1.3

Que dire de deux sous-ensembles A et B de E tels que $A \cup B = A \cap B$?

Exercice 1.1.4

Soient A, B, C trois ensembles.

Montrer que $A \cup B = A \cap C \;\Leftrightarrow\; B \subset A \subset C$.

Exercice 1.1.5

Soient A, B, C trois ensembles.

Montrer que $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow\; B \subset C$.

Exercice 1.1.6

Soient A, B, C trois ensembles.

Montrer que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Exercice 1.1.7

Soient E et F deux ensembles. Quelle relation y-a-t-il :

1. Entre $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?
2. Entre $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$?
3. Entre $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$?

Exercice 1.1.8

Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ deux familles de parties d'un ensemble E.

On suppose que pour tout indice i de I, on a $E = A_i \cup B_i$.

Montrer que $E = \Big(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcap\limits_{i \in I} B_i\Big)$.

Exercice 1.1.9

Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, on pose $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
$A \,\Delta\, B$ est appelé *différence symétrique* de A et de B.

1. Montrer qu'une définition équivalente est : $A \,\Delta\, B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
2. Vérifier que $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$, $\quad \overline{A \,\Delta\, B} = \bar{A} \,\Delta\, B = A \,\Delta\, \bar{B}$, $\quad$ et $\quad \bar{A} \,\Delta\, \bar{B} = A \,\Delta\, B$.
3. Calculer $A \,\Delta\, \emptyset$, $\quad A \,\Delta\, A \quad$ et $\quad A \,\Delta\, E$.

On désigne par A, B et C trois parties de E.

4. Montrer que $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$.
5. Vérifier également que $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$.
6. Quel signifie alors $A_1 \,\Delta\, A_2 \,\Delta\, \cdots \,\Delta\, A_n$, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n parties de E, avec $n \geq 2$?

Exercice 1.1.10

Soit E un ensemble non vide. Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$.

On dit que $\mathcal{F}$ est un *filtre* si : $\begin{cases} (a) & \forall\, X, Y \in \mathcal{F},\ X \cap Y \in \mathcal{F} \\ (b) & \forall\, X \in \mathcal{F}, \forall\, Y \supset X,\ Y \in \mathcal{F} \\ (c) & \emptyset \notin \mathcal{F} \end{cases}$

1. Que pourrait-on dire d'une famille non vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ ne vérifiant que (a) et (b) ?
2. $\mathcal{P}(E)$ est-il un filtre sur E?
   A quelle condition $\mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un filtre sur E, alors $E \in \mathcal{F}$.
4. Soit A un partie non vide de E.
   Montrer que que $\mathcal{F}_A = \{X \subset E, A \subset X\}$ est un filtre sur E.

1.2. Applications

Exercice 1.2.1

Soit f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que pour toutes parties A et B disjointes de E, $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

Montrer que $f(\emptyset) = 0$.

Prouver que pour toutes parties A et B de E, $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

Exercice 1.2.2

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to E$ trois applications.

Montrer que si, parmi les trois applications $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$, deux sont surjectives et la troisième injective (ou deux sont injectives et la troisième surjective) alors les trois applications f, g, et h sont bijectives.

Exercice 1.2.3

Soit f une application de E dans E.

Montrer que f est bijective si et seulement si, pour tout partie A de E, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

(on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.)

Exercice 1.2.4

Soit f une application de E dans F.

Montrer que pour toute partie A de E, $f(\overset{-1}{f}(B) \cap A) = B \cap f(A)$.

Exercice 1.2.5

Soit E un ensemble. Trouver toutes les applications f de E telles que, pour toute application g de E, on ait $g \circ f = f \circ g$.

Exercice 1.2.6

Soit f une application de E dans F.

Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(a) f est surjective
(b) Pour tout ensemble G et toutes applications $g, h : F \to G$, $g \circ f = h \circ f \;\Rightarrow\; g = h$.

Exercice 1.2.7

Soit f une application de E dans F.

On définit l'application $g : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ par : $\forall\, Y \subset F,\ g(Y) = \overset{-1}{f}(Y)$.

1. Montrer que g est injective si et seulement si f est surjective.
2. Montrer que g est surjective si et seulement si f est injective.

Exercice 1.2.8

Soit f une application de E dans F. Montrer l'équivalence de :

(a) f est injective
(b) Pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 1.2.9

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

Montrer les implications suivantes :

1. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective
2. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective
3. Si $g \circ f$ est surjective et g est injjective, alors f est surjective
4. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective

Exercice 1.2.10

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications.

Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

1.3. Applications, relations d'ordre

Exercice 1.3.1

Soient E un ensemble non vide, et A, B deux parties de E.

On note $[A, A \cup B] = \{X \subset E, A \subset X \subset A \cup B\}$ et $[A \cap B, B] = \{Y \subset E, A \cap B \subset Y \subset B\}$.

On définit $f : [A, A \cup B] \to [A \cap B, B]$ par $f(X) = X \cap B$.

On définit $g : [A \cap B, B] \to [A, A \cup B]$ par $g(Y) = Y \cup A$.

Montrer que f et g sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Exercice 1.3.2

Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 1.3.3

Soit f une application de E dans E et $\mathcal{S} = \{X \subset E,\ \overset{-1}{f}(f(X)) = X\}$.

1. Soit A une partie quelconque de E. Montrer que $\overset{-1}{f}(f(A))$ appartient à $\mathcal{S}$.
2. Montrer que toute intersection ou réunion d'éléments de $\mathcal{S}$ est encore élément de $\mathcal{S}$.

Exercice 1.3.4

Soit f une application de E dans F.

1. Montrer que pour toute partie A de E, $\overset{-1}{f}(f(A)) \supset A$.
2. Montrer que pour toute partie B de F, $f(\overset{-1}{f}(B)) = f(E) \cap B$.
3. Prouver que f est injective si et seulement si $\forall\, A \subset E$, $\overset{-1}{f}(f(A)) = A$.
4. Prouver que f est surjective si et seulement si $\forall\, B \subset F$, $f(\overset{-1}{f}(B)) = B$.

Exercice 1.3.5

Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E.

On considère l'application f, de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Dans le cas où f est bijective, déterminer f^{-1}.

Exercice 1.3.6

Soit A une partie d'un ensemble E.

On lui associe l'application χ_A, de E vers $\{0,1\}$, définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

Montrer que $A \mapsto \chi_A$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur l'ensemble $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$.

Exercice 1.3.7

Soient E et F deux ensembles ordonnés et A une partie non vide de E.

Soit f une application croissante de E dans F.

Montrer que si $\max A$ existe, alors $\max f(A)$ existe et est égal à $f(\max A)$.

La propriété subsiste-t-elle si on remplace “max” par “sup”?

Exercice 1.3.8

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'ordre total sur E.

1. On définit la relation $\mathcal{T}$ sur E par : $x \mathcal{T} y \Leftrightarrow (x \mathcal{R} y$ et $x \mathcal{S} y)$.
   Est-ce une relation d'ordre (total, partiel)?
2. Même question en définissant : $x \mathcal{U} y \Leftrightarrow (x \mathcal{R} y$ ou $x \mathcal{S} y)$.

Exercice 1.3.9

Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on définit deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ par :

- $(x,y) \mathcal{R} (x',y') \Leftrightarrow x \leq x'$ et $y \leq y'$
- $(x,y) \mathcal{S} (x',y') \Leftrightarrow (x < x')$ ou $(x = x'$ et $y \leq y')$.

Est-ce que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des relations d'ordre?

Exercice 1.3.10

Soient E et F deux ensembles ordonnés (l'ordre sur E étant total).

Soit f une application croissante de E vers F.

Montrer que f est injective si et seulement si elle est strictement croissante.

Montrer que le résultat n'est pas vrai si on ne suppose pas que E est totalement ordonné.

Exercice 1.3.11

Soit E un ensemble ordonné admettant un plus grand élément et telle que toute partie non vide possède une borne inférieure.

Montrer que toute partie non vide de E possède une borne supérieure.

Exercice 1.3.12

Soit E un ensemble ordonné possédant un élément minimum et dans lequel toute partie non vide admet une borne supérieure.

Soit f une application croissante de E dans E.

1. Montrer que l'ensemble $X = \{x \in E, x \leq f(x)\}$ est non vide
2. Montrer que la borne supérieure a de X vérifie $f(a) = a$.

Exercice 1.3.13

Cet exercice est connu sous le nom de *problème des hussards.*

Soit $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une famille de np réels.

Comparer $A = \min\limits_{1 \leq i \leq n} (\max\limits_{1 \leq j \leq p} a_{i,j})$ et $B = \max\limits_{1 \leq j \leq p} (\min\limits_{1 \leq i \leq n} a_{i,j})$

1.4. Relations d'équivalence

Exercice 1.4.1

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer, pour tout réel x, le cardinal de la classe d'équivalence de x.

Exercice 1.4.2

Soit E un ensemble muni d'une relation $\mathcal{R}$ réflexive et transitive.

On définit sur E la relation : $x \mathcal{S} y \Leftrightarrow x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$.

Montrer que S est une relation d'équivalence.

Exercice 1.4.3

Déterminer l'erreur dans le raisonnement suivant :

Si une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est symétrique et transitive alors elle est réflexive car pour tous x, y de E : $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ puis $(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x) \Rightarrow x \mathcal{R} x$

Exercice 1.4.4

Dans $\mathbb{R}^2$, la relation $(x,y) \mathcal{R} (z,t) \Leftrightarrow xy = zt$ est-elle une relation d'équivalence ?

Si oui quelles sont les classes d'équivalence ?

La relation $(x,y) \mathcal{S} (z,t) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = zt \\ xz \geq 0 \end{cases}$ est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 1.4.5

Dans le plan $\mathcal{P}$ d'origine O, la relation "$M\mathcal{R}N \Leftrightarrow O, M, N$ sont alignés" est-elle une relation d'équivalence ? Même question si on remplace $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P} - \{O\}$.

Exercice 1.4.6

Soit $\mathcal{R}$ une relation réflexive et symétrique sur un ensemble E.

On définit sur E la relation :

$x \mathcal{S} y$ si et seulement si il existe une suite finie $x_0, x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de E (avec $n \geq 1$) tels que $x_0 = x$, $x_n = y$, et $x_p \mathcal{R} x_{p+1}$ pour tout p de $\{0, \ldots, n-1\}$.

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

EXERCICE 1.4.7

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'équivalence sur un ensemble E.

On définit la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ par : $x\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,y \Leftrightarrow \exists\, z, x\,\mathcal{R}\,z$ et $z\,\mathcal{S}\,y$.

Montrer que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si et seulement si $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

EXERCICE 1.4.8

Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose $(m, n)\,\mathcal{R}\,(p, q) \Leftrightarrow mq = np$. Est-ce une relation d'équivalence?

EXERCICE 1.4.9

Quelle est la seule relation sur E qui soit à la fois réflexive, symétrique et antisymétrique ?

EXERCICE 1.4.10

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si et seulement si :

- $\mathcal{R}$ est réflexive
- Pour tous éléments x, y, z de E : $(x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,z) \Rightarrow z\,\mathcal{R}\,x$.

EXERCICE 1.4.11

Soit $\mathcal{M}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$ telle que : $\forall\, X, Y \in \mathcal{M}, \exists\, Z \in \mathcal{M}, Z \subset X \cap Y$.

On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A\,\mathcal{R}\,B \Leftrightarrow \exists\, X \in \mathcal{M}, A \cap X = B \cap X$.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

EXERCICE 1.4.12

Soit E un ensemble fini.

On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A\,\mathcal{R}\,B \Leftrightarrow$ card$(A\Delta B)$ est pair.

R est-elle une relation d'équivalence?

Corrigé des exercices

Corrigé de l'exercice 1.1.1

Par l'absurde, supposons qu'il existe deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $\mathcal{D} = A \times B$.

Les deux points $M(1,0)$ et $N(0,1)$ appartiennent à $\mathcal{D}$.

On en déduit que 1 appartient à A et à B.

Ainsi $P(1,1)$ appartient à $A \times B$ c'est-à-dire à $\mathcal{D}$, ce qui est absurde.

Conclusion : $\mathcal{D}$ ne peut s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 1.1.2

Notons $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cette famille d'ensembles distincts deux à deux.

On raisonne par l'absurde.

L'ensemble A_1 contient donc l'un des autres ensembles, noté A_{k_1}, de la famille.

De même, A_{k_1} contient l'un des autres ensembles de la famille, noté A_{k_2}.

En notant $k_0 = 1$ et en itérant ce procédé, on construit une famille infinie d'indices $k_0, k_1, \ldots$ tels que $A_{k_0} \supset A_{k_1} \supset A_{k_2} \supset \cdots$.

Par construction, deux indices successifs quelconques dans cette liste sont toujours distincts, ce qui implique que les inclusions successives sont strictes.

Ainsi on construit une suite infinie d'ensembles distincts deux à deux extraits de la famille $A_1, \ldots, A_n$ initiale, ce qui est absurde.

Conclusion : l'un au moins des ensembles $A_1, \ldots, A_n$ ne contient aucun des autres.

Corrigé de l'exercice 1.1.3

On a toujours les inclusions $A \cap B \subset A$ et $A \subset A \cup B$.

L'hypothèse de l'énoncé implique donc $A = A \cap B = A \cup B$.

De même, par symétrie, $B = A \cap B = A \cup B$. On en déduit $A = B$ (réciproque immédiate).

Corrigé de l'exercice 1.1.4

Dans le sens $\Leftarrow$: si $B \subset A \subset C$ alors $A \cup B = A = A \cap C$.

Réciproquement, on suppose que $A \cup B = A \cap C$.

On a toujours $B \subset A \cup B$ et $A \cap C \subset A$. L'hypothèse implique donc $B \subset A$.

De même, les implications $A \subset A \cup B$ et $A \cap C \subset C$ impliquent ici $A \subset C$.

Corrigé de l'exercice 1.1.5

Soit x un élément de B. On doit montrer que x est dans C.

- Si x est dans A, alors il est dans $A \cap B$ donc dans $A \cap C$ donc dans C.
- Si x n'est pas dans A, il est tout de même dans $A \cup B$ donc dans $A \cup C$.
  Ainsi x est dans $A \cup C$ mais pas dans A. Il est donc dans C.

Conclusion : on a l'inclusion $B \subset C$.

Remarque : on peut aussi utiliser les inclusions

- $B = B \cap (A \cup B) \subset B \cap (A \cup C)$ et
- $B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C) \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$ puis
- $(A \cap C) \cup (B \cap C) = C \cap (A \cup B) \subset C$.

Corrigé de l'exercice 1.1.6

Soit $X = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.

On "factorise" B dans la première intersection : $(A \cup B) \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$.

Ainsi : $X = [B \cup (A \cap C)] \cap (C \cup A) = [B \cap (C \cup A)] \cup [(A \cap C) \cap (C \cup A)]$.

Mais $(A \cap C) \cap (C \cup A)$ se réduit à $(A \cap C)$ car $(A \cap C) \subset (A \cup C)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} X &= [B \cap (C \cup A)] \cup (A \cap C) = [(B \cap C) \cup (B \cap A)] \cup (A \cap C) \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Corrigé de l'exercice 1.1.7

1. Si A est une partie de E, c'est une partie de $E \cup F$. Donc $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.
   Par symétrie $\mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$. On en déduit $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.
   Si aucun des deux ensembles E ou F ne contient l'autre, alors l'inclusion réciproque est fausse car$E \cup F$ est une partie de $E \cup F$ sans être ni une partie de E ni une partie de F.
   Si $E \subset F$ par exemple, on a $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ et donc $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cup F)$.
   Conclusion :
   On a toujours $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$. Ce n'est une égalité que si $E \subset F$ ou $F \subset E$.
2. Un ensemble est une partie de $E \cap F$ si et seulement si c'est à la fois une partie de E et une partie de F.
   Autrement dit, on a l'égalité $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
3. Les éléments de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ sont les couples (A, B), où $A \subset E$ et $B \subset F$.
   Les éléments de $\mathcal{P}(E \times F)$ sont les sous-ensembles de $E \times F$.
   Il n'y a pas d'inclusion entre $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.
   Cependant, si on note $G = \{X \times Y, X \subset E, Y \subset F\}$, alors l'application $(X, Y) \mapsto X \times Y$ est une bijection de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ sur G, et $G \subset \mathcal{P}(E \times F)$ (sans qu'il y ait en général égalité comme le montre l'exercice 1).

Corrigé de l'exercice 1.1.8

Posons $F = (\bigcup_{i\in I} A_i) \bigcup (\bigcap_{i\in I} B_i)$. On a bien entendu $F \subset E$.

Réciproquement, soit x un élément de E.

- Si x appartient à $\bigcap_{i\in I} B_i$, alors x appartient à F.
- Sinon, donc s'il existe au moins un i tel que $x \notin B_i$, alors l'égalité $E = A_i \cup B_i$ montre que x est élément de A_i, et donc qu'il appartient à $\bigcup_{i\in I} A_i$. Ainsi x est encore élément de F.

Conclusion : on a bien l'égalité $E = (\bigcup_{i\in I} A_i) \bigcup (\bigcap_{i\in I} B_i)$.

Corrigé de l'exercice 1.1.9

1. On a les égalités :
$$\begin{aligned} A\,\Delta\, B &= (A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B}) \\ &= (A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}) = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B) \end{aligned}$$
2. On a $A\,\Delta\, B = B\,\Delta\, A$ car la définition est symétrique par rapport en A et B.
On a les égalités :
$$\begin{aligned} \overline{A}\,\Delta\, B &= (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{\overline{A}}\cap B) = (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B) = \overline{(A\cup B)}\cup(A\cap B) \\ &= \overline{(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})} = \overline{A\,\Delta\, B} \end{aligned}$$
Par symétrie, on en déduit : $A\,\Delta\,\overline{B} = \overline{B}\,\Delta\, A = \overline{B\,\Delta\, A} = \overline{A\,\Delta\, B}$.
On peut alors écrire : $\overline{A}\,\Delta\,\overline{B} = \overline{A\,\Delta\,\overline{B}} = \overline{\overline{A\,\Delta\, B}} = A\,\Delta\, B$.
3. C'est évident :
   - $A\,\Delta\,\emptyset = (A\cup\emptyset)\setminus(A\cap\emptyset) = A\setminus\emptyset = A$.
   - $A\,\Delta\, A = (A\cup A)\setminus(A\cap A) = A\setminus A = \emptyset$.
   - $A\,\Delta\, E = (A\cup E)\setminus(A\cap E) = E\setminus A = \overline{A}$.
4. On a les égalités :
$$\begin{aligned} (A\cap B)\,\Delta\,(A\cap C) &= [(A\cap B)\cup(A\cap C)]\setminus[(A\cap B)\cap(A\cap C)] \\ &= [A\cap(B\cup C)]\setminus[A\cap(B\cap C)] \\ &= A\cap[(B\cup C)\setminus(B\cap C)] = A\cap(B\,\Delta\, C) \end{aligned}$$
5. Tout d'abord, par définition :
$A\,\Delta\,(B\,\Delta\, C) = X\cup Y$, avec $X = \overline{A}\cap(B\,\Delta\, C)$ et $Y = A\cap(\overline{B\,\Delta\, C})$.
Or $X = \overline{A}\cap\left[(\overline{B}\cap C)\cup(B\cap\overline{C})\right] = (\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})$.
D'autre part (changer $\overline{A}$ en A et B en $\overline{B}$ dans le calcul précédent) :
$Y = A\cap(\overline{B}\,\Delta\, C) = (A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$.
Ainsi : $A\,\Delta\,(B\,\Delta\, C) = (A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$.
Enfin on note que $(A\,\Delta\, B)\,\Delta\, C = C\,\Delta\,(A\,\Delta\, B) = C\,\Delta\,(B\,\Delta\, A)$.
Pour obtenir $(A\,\Delta\, B)\,\Delta\, C$ il suffit d'échanger A et C dans l'expression de $A\,\Delta\,(B\,\Delta\, C)$.

On voit que cette expression n'est pas modifiée dans cet échange.

Conclusion : pour toutes parties A, B, C de E, on a $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

Remarque : l'ensemble $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ est donc formé des éléments de E qui sont dans l'un et dans l'un seulement des trois ensembles A, B, C, ou bien qui sont simultanément dans ces trois ensembles.

6. Les propriétés $A \Delta B = B \Delta A$ (commutativité) et $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ (associativité) montrent que la notation $A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n$ a un sens (et désigne toujours la même partie de E) quelque soit l'ordre dans lequel on effectue les calculs.

   Plus précisément $A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n$ désigne l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à exactement un nombre impair d'ensembles A_k.

   Cette propriété est en effet vraie si $n = 2$ (car $A_1 \Delta A_2$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans l'un et dans l'un seulement des deux ensembles A_1 et A_2).

   Cette propriété est vraie aussi si $n = 3$, comme le montre le résultat de la question précédente.

   Plus généralement, si la propriété est vraie au rang n ($n \geq 2$) elle l'est au rang $n + 1$ grâce à l'égalité $A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n \Delta A_{n+1} = (A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n) \Delta A_{n+1}$.

Corrigé de l'exercice 1.1.10

1. Si $\mathcal{F}$ vérifie (a) et (b), et si $\emptyset$ est un élément de $\mathcal{F}$, toute partie Y de E est dans $\mathcal{F}$ (utiliser (b) avec $X = \emptyset$.) La seule possibilité est donc $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$.
2. $\mathcal{P}(E)$ n'est pas un filtre sur E, à cause de la propriété (c).

   Posons $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$. $\mathcal{F}$ est donc l'ensemble des parties non vides de E.

   Supposons que E contienne au moins deux éléments distincts a et b.

   Alors $X = \{a\}$ et $Y = \{b\}$ sont deux éléments de $\mathcal{F}$.

   Mais pour eux l'hypothèse (a) n'est plus vérifiée.

   Il est donc nécessaire que E (qui est non vide) se réduise à un seul élément x.

   Réciproquement, si $E = \{x\}$, alors $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E) - \{\emptyset\} = \{\{x\}\}$ est un filtre (il se réduit au seul élément $X = \{x\}$).
3. C'est une conséquence du fait que $\mathcal{F}$ est non vide (on peut donc choisir un élément X dans $\mathcal{F}$) et de la propriété (b) en choisissant $Y = E$.
4. $\mathcal{F}_A$ est non vide car A en est un élément.

   Soient X, Y deux éléments de $\mathcal{F}_A$ (donc deux parties de E contenant A). Alors $X \cap Y$ est une partie de E contenant A, c'est-à-dire $X \cap Y \in F_A$.

   Soit X un élément de $\mathcal{F}_A$ et Y une partie de E contenant X.

   Alors évidemment Y contient A ce qui prouve l'hypohèse (b).

   Enfin $\emptyset$ n'est pas un élément de $\mathcal{F}_A$ puisque par hypothèse A est non vide.

   $\mathcal{F}_A$ est donc un filtre sur E.

Corrigé de l'exercice 1.2.1

$f(\emptyset) = f(\emptyset \cup \emptyset) = f(\emptyset) + f(\emptyset)$. Par conséquent $f(\emptyset) = 0$.

Pour toutes parties A, B de E, on a l'union disjointe : $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

Il en découle $f(A) = f(A \cap B) + f(A \setminus B)$.

De même, on a l'union disjointe : $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$.

On en déduit $f(A \cup B) = f(B) + f(A \setminus B) = f(B) + f(A) - f(A \cap B)$.

Corrigé de l'exercice 1.2.2

Rappelons que si u et v sont deux applications et si $w = v \circ u$, alors l'injectivité de w implique celle de u et la surjectivité de w implique celle de v. On sait bien sûr que si u et v sont toutes deux injectives (resp. toutes deux surjectives) alors il en est de même de w.

- On ne perd rien à supposer que $a = h \circ g \circ f$ et $b = g \circ f \circ h$ sont surjectives et que $c = f \circ h \circ g$ est injective.

  La surjectivité de b implique celle de g.

  L'injectivité de c implique celle de g. Ainsi g est bijective.

  On en déduit que $f \circ h = c \circ g^{-1}$ est injective, ainsi donc que h.

  Mais la surjectivité de a implique celle de h. L'application h est donc bijective.

  On en déduit que $f = (h \circ g)^{-1} \circ a$ est surjective et que $f = c \circ (h \circ g)^{-1}$ est injective.

  Ainsi les trois applications f, g, h sont bijectives.
- Pour la deuxième question, on peut supposer par exemple que a et b sont injectives et que c est surjective. On en déduit alors (passons les détails) que f est injective et surjective donc bijective, puis qu'il en est de même de h, avant de terminer par g.

Corrigé de l'exercice 1.2.3

- On suppose que f est bijective. Soit A une partie de E.

  Soit y un élément de E et x son unique antécédent par f.

  On a les équivalences : $y \in \overline{f(A)} \Leftrightarrow y \notin f(A) \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow x \in \overline{A} \Leftrightarrow y \in f(\overline{A})$.

  Ainsi $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
- Réciproquement, l'hypothèse faite sur f implique $f(E) = f(\overline{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)} = \overline{\emptyset} = E$.

  L'application f est donc surjective.

  Soient a et b deux éléments distincts de E. Posons $A = \{a\}$.

  On a $b \in \overline{A} \Rightarrow f(b) \in f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \Rightarrow f(b) \notin f(A) \Rightarrow f(b) \neq f(a)$.

  L'application f est donc injective, et finalement bijective.

Corrigé de l'exercice 1.2.4

Soi y un élément de F. On a les équivalences suivantes :

$$y \in B \cap f(A) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \in B \\ \exists x \in A, f(x) = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \ \exists x \in A, f(x) = y, f(x) \in B$$

$$\Leftrightarrow \ \exists x \in \overset{-1}{f}(B) \cap A, f(x) = y \ \Leftrightarrow \ y \in f(\overset{-1}{f}(B) \cap A)$$

On a donc bien l'égalité : $f(\overset{-1}{f}(B) \cap A) = B \cap f(A)$.

Corrigé de l'exercice 1.2.5

Soit x un élément de E, et g l'application constante qui à tout élément t de E associe x.

L'hypothèse $g \circ f = f \circ g$, évaluée en un point quelconque de E, donne $x = f(x)$.

L'application f est donc nécessairement l'identité de E.

Réciproquement, l'application identité de E convient de manière évidente.

Corrigé de l'exercice 1.2.6

- Supposons que f soit surjective.
  Soient g, h deux applications de F dans un ensemble G telle que $g \circ f = h \circ f$.
  Soit y un élément quelconque de F, et soit x un antécédent de y par f.
  On a $g(y) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(y)$.
  Puisque cette égalité est vraie pour tout y de F, il en résulte $g = h$.
- Réciproquement, on suppose que f n'est pas surjective.
  Il faut trouver G et $g, h : F \ \rightarrow \ G$ telles que $g \circ f = h \circ f$ mais $g \neq h$.
  Soit y un élément de F ne possédant aucun antécédent par f.
  Posons $G = \{0, 1\}$ et définissons g et h par : $\begin{cases} \forall z \neq y, g(z) = h(z) = 1 \\ g(y) = 1, h(y) = 0 \end{cases}$
  Les applications g et h ne diffèrent qu'en y. Ainsi $g \circ f = h \circ f$ car pour tout x de E, on a $f(x) \neq y$ et donc $g(f(x)) = h(f(x))$. Pourtant $g \neq h$.

On a donc prouvé l'équivalence demandée.

Corrigé de l'exercice 1.2.7

1. On prouve d'abord l'équivalence entre l'injectivité de g et la surjectivité de f.
   - Supposons g injective et montrons que $f(E) = F$.
     Or $g(F) = \overset{-1}{f}(F) = E$ et $g(f(E)) = \overset{-1}{f}(f(E)) = E$ (pour tout x de E, $f(x)$ est dans $f(E)$ et évidemment dans F).
     L'injectivité de g permet alors d'affirmer que $f(E) = F$.

- Réciproquement, on suppose que f est surjective.
  Il en découle que pour toute partie Y de F, on a $f(\overset{-1}{f}(Y)) = Y$ (plus généralement, si f était quelconque, on aurait $f(\overset{-1}{f}(Y)) = Y \cap f(E)$).
  Si Y et Z sont deux parties de F telles que $g(Y) = g(Z)$, on en déduit $f(g(Y)) = f(g(Z))$, c'est-à-dire $Y = Z$, ce qui prouve l'injectivité de G.

2. On prouve maintenant l'équivalence entre la surjectivité de g et l'injectivité de f.
   - Supposons g surjective. Il faut montrer que f est injective.
     Soient a et b deux éléments de E tels que $f(a) = f(b)$.
     Par hypothèse, il existe $Y \subset F$ et $Z \subset F$ telles que $g(Y) = \{a\}$ et $g(Z) = \{b\}$.
     Autrement dit $\overset{-1}{f}(Y) = \{a\}$ et $\overset{-1}{f}(Z) = \{b\}$. Il en découle que $f(a) \in Y$ et $f(b) \in Z$.
     Or $f(a) = f(b)$. Donc $f(a) \in Z$ c'est-à-dire $a \in \overset{-1}{f}(Z) = \{b\}$.
     Cela n'est évidemment possible que si $a = b$. L'application f est donc injective.
   - On suppose enfin que f est injective.
     Soit X une partie de E. Pour montrer la surjectivité de g, il faut trouver $Y \subset F$ tel que $g(Y) = X$, c'est-à-dire tel que $\overset{-1}{f}(Y) = X$.
     On va montrer que l'ensemble $Y = f(X)$ convient.
     En effet, on a les équivalences :
     $$\begin{aligned} a \in \overset{-1}{f}(f(X)) &\Leftrightarrow f(a) \in f(X) \Leftrightarrow \exists\, x \in X, f(a) = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists\, x \in X, a = x \text{ (conséquence de l'injectivité de } f) \\ &\Leftrightarrow a \in X \end{aligned}$$
     On a bien l'égalité $\overset{-1}{f}(f(X)) = X$, c'est-à-dire $g(Y) = X$ avec $Y = f(X)$, ce qui prouve la surjectivité de g.

Corrigé de l'exercice 1.2.8

- On suppose que f est injective. Soient A et B deux parties de E. On a :
  $$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(A \cap B) \subset f(A) \\ f(A \cap B) \subset f(B) \end{cases} \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$
  Réciproquement, soit y un élément de $f(A) \cap f(B)$.
  Il existe a dans A tel que $y = f(a)$ et b dans B tel que $y = f(b)$.
  L'injectivité de f donne alors $a = b$. Il en découle $a \in A \cap B$ donc $y \in f(A \cap B)$.
  Ainsi on a l'égalité $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, ce qu'il fallait démontrer.
- Réciproquement, on suppose que : $\forall\, A, B \subset E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
  Soient a et b deux éléments de E tels que $f(a) = f(b)$. Il faut montrer $a = b$.
  Posons $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$.
  On a $f(A) = f(\{a\}) = \{f(a)\} = \{f(b)\} = f(\{b\}) = f(B)$.
  Ainsi, et en utilisant l'hypothèse, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) = f(A)$ est non vide.
  Il en découle que $A \cap B = \{a\} \cap \{b\}$ est non vide, ce qui implique $a = b$.
  On a ainsi prouvé l'injectivité de f.

Corrigé de l'exercice 1.2.9

1. On suppose que $g \circ f$ est surjective.
   Soit z un élément de G : z possède un antécédent x dans E par $g \circ f$.
   On a alors $z = (g \circ f)(x) = g(y)$ avec $y = f(x)$.
   Ainsi z possède un antécédent y dans F par g : l'application g est surjective.
2. On suppose que $g \circ f$ est injective. Soient a et b deux éléments de E.
   Si $f(a) = f(b)$ alors $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$ puis $a = b$ de par l'hypothèse sur $g \circ f$.
   Ainsi $f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; a = b$: l'application f est injective.
3. On suppose $g \circ f$ surjective et g injective.
   Soit y un élément de F. Soit z son image par g.
   Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe x dans E tel que $z = (g \circ f)(x)$.
   On peut donc écrire $z = g(y)$ et $z = g(f(x))$. L'injectivité de g donne alors $y = f(x)$.
   Ainsi tout y dans F possède un antécédent x par f : l'application f est surjective.
4. On suppose $g \circ f$ injective et f surjective.
   Soient y et y' deux éléments de F tels que $g(y) = g(y')$.
   Puisque f est surjective, il existe x, x' dans E tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.
   On en déduit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, puis $x = x'$ car $g \circ f$ est injective.
   Il en découle $y = y'$, ce qui prouve l'injectivité de g.

Corrigé de l'exercice 1.2.10

La bijectivité (donc la surjectivité) de $g \circ f$ implique la surjectivité de g.

La bijectivité (donc l'injectivité) de $h \circ g$ implique l'injectivité de g.

Ainsi g est bijective. On en déduit que $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective.

De même, l'application $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est bijective.

Corrigé de l'exercice 1.3.1

Il suffit de vérifier que $g \circ f$ est l'identité de $[A, A \cup B]$ et que $f \circ g$ est l'identité de $[A \cap B, B]$.

- Soit X un élément de $[A, A \cup B]$.
  On a $(g \circ f)(X) = g(X \cap B) = (X \cap B) \cup A = (X \cup A) \cap (B \cup A)$.
  Puisque X contient A, on a $X \cup A = X$ donc $(g \circ f)(X) = X \cap (A \cup B)$.
  Mais puisque X est contenu dans $A \cup B$, on a $(g \circ f)(X) = X$.
- Soit Y un élément de $[A \cap B, B]$. On a :

$$\begin{aligned}(f \circ g)(Y) &= f(Y \cup A) = (Y \cup A) \cap B = (Y \cap B) \cup (A \cap B)\\ &= Y \cup (A \cap B) \text{ (car } Y \text{ est inclus dans } B)\\ &= Y \text{ (car } Y \text{ contient } A \cap B)\end{aligned}$$

Conclusion : f et g sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

Corrigé de l'exercice 1.3.2

On raisonne par l'absurde. Soit f une surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Pour toute partie X de E, il existe donc x dans E tel que $f(x) = X$.

Il est alors légitime de se demander si x appartient ou non à l'ensemble X.

Plus précisément, on définit le sous ensemble A formé des x de E tels que $x \notin f(X)$.

L'application f étant surjective, il existe a dans E tel que $f(a) = A$.

De deux choses l'une :

- Soit a appartient à A, ce qui signifie que a n'appartient pas à $f(a)$ c'est-à-dire à A...
- Soit a n'appartient pas à A, ce qui signifie que a appartient à $f(a)$ c'est-à-dire à A...

Dans les deux cas la contradiction est manifeste! L'hypothèse de départ est donc absurde.

Autrement dit, il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Corrigé de l'exercice 1.3.3

Remarque (voir exercice suivant) :

- Pour toute partie X de E on a $\overset{-1}{f}(f(X)) \supset X$.
- Pour toute partie Y de E, on a $f(\overset{-1}{f})(Y) \subset Y$

1. Soit A une partie de E, et soit $B = \overset{-1}{f}(f(A))$.
   On utilise deux fois la remarque précédente.
   D'une part B contient A. L'ensemble $f(B)$ contient donc $f(A)$.
   D'autre part $f(B) = f(\overset{-1}{f}(f(A)))$ est inclus dans $f(A)$.
   On en déduit $f(B) = f(A)$, puis $\overset{-1}{f}(f(B)) = \overset{-1}{f}(f(A)) = B$, ce qu'il fallait démontrer.
2. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'élements de $\mathcal{S}$.
   Pour la réunion c'est évident :
   $\overset{-1}{f}\left[f(\bigcup_{i \in I} A_i)\right] = \overset{-1}{f}\left[\bigcup_{i \in I} f(A_i)\right] = \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f}(f(A_i)) = \bigcup_{i \in I} A_i$.
   Pour l'intersection, il y a une inclusion :
   $\overset{-1}{f}\left[f(\bigcap_{i \in I} A_i)\right] \subset \overset{-1}{f}\left[\bigcap_{i \in I} f(A_i)\right] \subset \bigcap_{i \in I} \overset{-1}{f}(f(A_i)) \subset \bigcap_{i \in I} A_i$.
   Mais on sait que l'inclusion inverse $\overset{-1}{f}\left[f(\bigcap_{i \in I} A_i)\right] \supset \bigcap_{i \in I} A_i$ est vraie.
   On a donc prouvé que $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$ sont éléments de $\mathcal{S}$.

Corrigé de l'exercice 1.3.4

1. Soit A une partie de E. Soit a un élément de A.

   Par définition l'image b de a est dans $B = f(A)$ donc a est dans $\overset{-1}{f}(B)$.

   Ainsi a appartient à $\overset{-1}{f}(f(A))$. On a donc prouvé $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$.

2. Soit B une partie de F. On a les équivalences suivantes :

   $$\begin{aligned} b \in f(\overset{-1}{f}(B)) &\Leftrightarrow \exists\, a \in \overset{-1}{f}(B), f(a) = b \;\Leftrightarrow\; \exists\, a \in E, f(a) \in B, f(a) = b \\ &\Leftrightarrow \exists\, a \in E, f(a) = b, b \in B \;\Leftrightarrow\; b \in f(E) \cap B \end{aligned}$$

   On a donc prouvé l'égalité $f(\overset{-1}{f}(B)) = f(E) \cap B$, et il en découle $f(\overset{-1}{f}(B)) \subset B$.

3. On suppose que f est injective. Soit A une partie de E.

   Pour prouver l'égalité $\overset{-1}{f}(f(A)) = A$, il suffit de vérifier l'inclusion $\overset{-1}{f}(f(A)) \subset A$.

   On se donne donc un élément b de $\overset{-1}{f}(f(A))$.
   Par définition $f(b)$ est dans $f(A)$. Donc il existe a dans A tel que $f(b) = f(a)$.
   Mais l'égalité $f(b) = f(a)$ et l'injectivité de f donnent $b = a$ donc $b \in A$.

   Ainsi on a l'inclusion $\overset{-1}{f}(f(A)) \subset A$, puis l'égalité.

   On suppose réciproquement que pour toute partie A de E, on a $\overset{-1}{f}(f(A)) = A$.
   Soient a et b deux éléments de E tels que $f(a) = f(b)$. Il faut prouver $a = b$.

   $f(b) = f(a) \;\Rightarrow\; f(b) \in \{f(a)\} = f(\{a\}) \;\Rightarrow\; b \in \overset{-1}{f}(f(\{a\}) = \{a\}$.
   Ce dernier résultat signifie $b = a$, ce qu'il fallait démontrer.

4. L'hypothèse s'exprime ici par : $\forall\, B \subset F, B = f(E) \cap B$ (question 2).
   Autrement dit, elle signifie que pour toute partie B de F, on a $B \subset f(E)$, ce qui équivaut évidemment à $f(E) = F$, c'est-à-dire à la surjectivité de f.

Corrigé de l'exercice 1.3.5

1. On note que pour toute partie X de E contenant A et B, on a $f(X) = (A, B)$.
   En particulier, $f(A \cup B) = f(E) = (A, B)$.
   Il s'ensuite que si f est injective alors $A \cup B = E$.
   Réciproquement, supposons $A \cup B = E$, et soient X, Y deux parties de E telles que $f(X) = f(Y)$.
   On a donc $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$.
   Par réunion, on en déduit : $(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$, donc $X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$, ou encore $X \cap E = Y \cap E$ c'est-à-dire $X = Y$.
   Conclusion : f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

2. Supposons $A \cap B = \emptyset$. Soient A' une partie de A et B' une partie de B.

   Pour montrer que f est surjective, il faut trouver $X \subset E$ telle que $\begin{cases} X \cap A = A' \\ X \cap B = B' \end{cases}$

   On constate que $X = A' \cup B'$ convient. En effet :

   $$\begin{aligned} f(A' \cup B') &= ((A' \cup B') \cap A, (A' \cup B') \cap B) \\ &= ((A' \cap A) \cup (B' \cap A), (A' \cap B) \cup (B' \cap B)) \\ &= (A' \cup \emptyset, \emptyset \cup B') = (A', B') \end{aligned}$$

   Réciproquement, supposons f sujective. Alors il existe $X \subset E$ tel que $f(X) = (\emptyset, B)$.

   Autrement dit, il existe $X \subset E$ tel que $\begin{cases} X \cap A = \emptyset \\ X \cap B = B \end{cases}$ c'est-à-dire tel que $\begin{cases} X \subset \overline{A} \\ B \subset X \end{cases}$

   On en déduit $B \subset \overline{A}$, ce qui exprime que l'intersection $A \cap B$ est vide.

   Conclusion : f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

3. On suppose que f est bijective, c'est-à-dire que $\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = E \end{cases}$, ce qui s'écrit $B = \overline{A}$.

   D'après la première partie de la question précédente, la bijection réciproque de f est l'application g de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ vers $\mathcal{P}(E)$ définie par $g(A', B') = A' \cup B'$.

Corrigé de l'exercice 1.3.6

Pour toute application f de E dans $\{0, 1\}$, il existe effectivement une et une seule partie A de E telle que $f = \chi_A$: c'est l'ensemble des éléments x de E tels que $f(x) = 1$, c'est-à-dire l'image réciproque du singleton $\{1\}$.

Corrigé de l'exercice 1.3.7

Posons $\alpha = \max A$. Pour tout a de A, on a $a \leq \alpha$ donc $f(a) \leq f(\alpha)$.

Ainsi $f(\alpha)$ est à la fois un élément et un majorant de $f(A)$.

Autrement dit $\max f(A)$ existe et est égal à $f(\alpha)$ c'est-à-dire à $f(\max A)$.

La propriété n'est plus vraie si on remplace "max" par "sup".

On peut par exemple considérer l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \mathrm{E}(x)$.

Cette application est croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (elle est même strictement croissante.)

Si on considère $A = [0, 1[$, alors $f(A) = [0, 1[$. Donc $\sup A = 1$ et $\sup f(A) = 1$.

Mais $f(\sup A) = f(1) = 2$ n'est pas égal $\sup f(A)$.

Corrigé de l'exercice 1.3.8

- Pour tout x de E, on a $x\,\mathcal{R}\,x$ et $x\,\mathcal{S}\,x$ donc $x\,\mathcal{T}\,x$ (réflexivité.)
  $\forall\, x,y \in E, \begin{cases} x\,\mathcal{T}\,y \\ y\,\mathcal{T}\,x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y,\ x\,\mathcal{S}\,y \\ y\,\mathcal{R}\,x,\ y\,\mathcal{S}\,x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y,\ y\,\mathcal{R}\,x \\ x\,\mathcal{S}\,y,\ y\,\mathcal{S}\,x \end{cases} \Rightarrow x = y.$
  La relation $\mathcal{T}$ est donc antisymétrique.
  Enfin soient x, y, z dans E tels que $x\,\mathcal{T}\,y$ et $y\,\mathcal{T}\,z$.
  On a $x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,z$ donc $x\,\mathcal{R}\,z$. De même, $\begin{cases} x\,\mathcal{S}\,y \\ y\,\mathcal{S}\,z \end{cases} \Rightarrow x\,\mathcal{S}\,z.$
  On en déduit $x\,\mathcal{T}\,z$. La relation $\mathcal{T}$ est donc transitive : c'est une relation d'ordre sur E.
  Mais ce n'est pas nécessairement une relation d'ordre total.
  En effet, définissons par exemple la relation $\mathcal{S}$ par $x\,\mathcal{S}\,y \Leftrightarrow y\,\mathcal{R}\,x$.
  Alors la relation $\mathcal{T}$ devient la relation d'égalité sur E (c'est bien une relation d'ordre, mais qui n'est totale que si E se réduit à un seul élément...)
- La relation $\mathcal{U}$ peut ne pas être une relation d'ordre.
  En effet, définissons par exemple la relation $\mathcal{S}$ par $x\,\mathcal{S}\,y \Leftrightarrow y\,\mathcal{R}\,x$.
  Alors la relation $\mathcal{T}$ devient la relation universelle (car $\mathcal{R}$ est totale) et n'est pas antisymétrique (du moins si E contient au moins deux éléments distincts.)

Corrigé de l'exercice 1.3.9

- $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{R}^2$.
  Par exemple les couples $(0,1)$ et $(1,0)$ ne sont pas comparables.
- $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$: c'est l'ordre *lexicographique*.
  La réflexivité est évidente : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y)\,\mathcal{S}\,(x,y)$.
  Si $\begin{cases} (x,y)\,\mathcal{S}\,(x',y') \\ (x',y')\,\mathcal{S}\,(x,y) \end{cases}$ alors nécessairement $x = x'$ et $y = y'$: $\mathcal{S}$ est antisymétrique.
  Si $\begin{cases} (x,y)\,\mathcal{S}\,(x',y') \\ (x',y')\,\mathcal{S}\,(x'',y'') \end{cases}$ alors $x < x'$ ou $x' < x''$ et dans ce cas $x < x''$, ou bien on a le système $\begin{cases} x = x' = x'' \\ y \le y' \le y'' \end{cases}$ et là encore on a $(x,y)\,\mathcal{S}\,(x'',y'')$: $\mathcal{S}$ est transitive.
  Si (x,y) et (x',y') sont deux couples quelconques :
  - Ou bien $x < x'$ et dans ce cas $(x,y)\,\mathcal{S}\,(x',y')$.
  - Ou bien $x' < x$ et dans ce cas $(x',y')\,\mathcal{S}\,(x,y)$.
  - Ou bien $x = x'$ et alors $(x,y)\,\mathcal{S}\,(x',y')$ ou $(x',y')\,\mathcal{S}\,(x,y)$ selon que $y \le y'$ ou $y' < y$.

  Dans tous les cas (x,y) et (x',y') sont comparables : $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre total.

Corrigé de l'exercice 1.3.10

- Si f est strictement croissante, alors elle est injective. En effet soient a, b deux éléments distincts de E, avec par exemple $a < b$ (l'ordre sur E est total).
  L'hypothèse sur f implique $f(a) < f(b)$ et donc $f(a) \neq f(b)$.
- Réciproquement supposons f croissante et injective.
  Soient a et b deux éléments de E tels que $a < b$.
  On a $f(a) \leq f(b)$ car f est croissante, et $f(a) \neq f(b)$ car f est injective.
  Ainsi $f(a) < f(b)$. L'application f est donc strictement croissante.
- L'équivalence n'est plus vraie si l'ordre sur E n'est pas total.
  Considérons par exemple un ensemble fini X (contenant au moins deux éléments a et b).
  On munit l'ensemble $E = \mathcal{P}(X)$ de la relation d'inclusion.
  C'est une relation d'ordre, mais partiel car $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables.
  Soit f l'application de E dans $\mathbb{N}$ qui à toute partie de X associe son cardinal.
  Elle est strictement croissante car si $A \subset B \subset X$, avec $A \neq B$ alors $\text{Card}(A) < \text{Card}(B)$.
  Pourtant f n'est pas injective car par exemple $f(\{a\}) = f(\{b\}) = 1$.

Corrigé de l'exercice 1.3.11

Soit X une partie non vide de A, et soit Y l'ensemble des majorants de X.

L'ensemble Y n'est pas vide car il contient le plus grand élément de E.

On en déduit que Y a une borne inférieure α.

Montrons que $\alpha = \text{Sup}(A)$, donc $\alpha = \text{Min}(Y)$. On sait déjà que α minore Y.

Il reste à prouver que α appartient à Y, c'est-à-dire que α est un majorant de X.

Or pour tout x de X et tout y de Y on a $x \leq y$.

Cela signifie que tout x de X est un minorant de Y et qu'il vérifie donc $x \leq \alpha$.

Ainsi α est un majorant de X, ce qui achève la démonstration.

Corrigé de l'exercice 1.3.12

1. Soit $\alpha = \min(E)$. On a en particulier $\alpha \leq f(\alpha)$, ou encore $\alpha \in X$. Ainsi $X \neq \emptyset$.
2. L'ensemble X n'est pas vide. Il possède donc une borne supérieure a.
   - Pour tout x de X, on a $x \leq a$ donc (compte tenu de la définition de X et du fait que f est croissante) : $x \leq f(x) \leq f(a)$.
     Cela signifie que $f(a)$ est un majorant de X.
     Compte tenu de la définition de a, on en déduit : $a \leq f(a)$.
   - Puisque f est croissante, l'inégalité $a \leq f(a)$ implique $f(a) \leq f(f(a))$.
     Cela signifie que $f(a)$ est un élément de X, puis que $f(a) \leq a$.
   - On a donc prouvé l'égalité $f(a) = a$.
     Remarque : puisque $a \leq f(a)$, l'élément a est dans X. Donc $a = \max(A)$.
   - Cas particulier : toute application croissante f d'un segment $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même admet au moins un point fixe : $\exists\, a \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(a) = a$.

Corrigé de l'exercice 1.3.13

On peut se représenter les np coefficients a_{ij} rangés dans un tableau de n lignes et de p colonnes (un peu à la manière d'un régiment de hussards), chaque coefficient a_{ij} venant se placer à l'intersection de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j.

- Il existe un indice i_0 tel que $A = \max_{1\leq j \leq p} a_{i_0,j}$.
  Cela signifie que le "hussard" A a été extrait de la ligne d'indice i_0.
  Plus précisément, A est le plus grand des hussards de cette ligne.
- Il existe un indice j_0 tel que $B = \min_{1\leq i \leq n} a_{i,j_0}$.
  Cela signifie que le "hussard" B a été extrait de la colonne d'indice j_0.
  Plus précisément, B est le plus petit des hussards de cette colonne.

Considérons le hussard H d'indice a_{i_0,j_0}.

- Il appartient à la ligne de A, donc $H \leq A$.
- Il appartient à la colonne de B, donc $B \leq H$.

On en déduit $B \leq A$: le plus grand des plus petits hussards de chaque colonne est plus petit (ou de même taille) que le plus petit des plus grands hussards de chaque ligne!

Voici un exemple, pour se convaincre qu'il peut y avoir inégalité stricte.

Si le tableau des a_{ij} s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $B = 0$ et $A = 1$.

Corrigé de l'exercice 1.4.1

La relation $\mathcal{R}$ s'écrit $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, où f est l'application $t \mapsto t^3 - 3t$.

Il est alors évident que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Soit a un réel. La classe d'équivalence de a est l'ensemble des réels x tels que $f(x) = f(a)$.

Voyons d'abord une réponse algébrique à la deuxième question de l'exercice.

On a : $f(x) - f(a) = x^3 - 3x - a^3 + 3a = (x - a)(x^2 + ax + a^2 - 3)$.

Donc $x \,\mathcal{R}\, a \Leftrightarrow (x = a$ ou $P(x) = 0)$ avec $P(x) = x^2 + ax + a^2 - 3$.

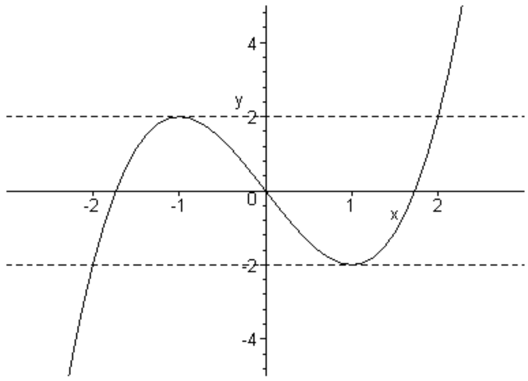
Le discriminant de P est $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 3) = 3(4 - a^2)$.

- Si $|a| > 2$, alors $\Delta < 0$, et la classe d'équivalence de a se réduit au singleton $\{a\}$.
- Si $a = \pm 2$, alors $P(x) = (x + \frac{a}{2})^2$.
  Dans ce cas la classe d'équivalence de x se réduit à la paire $\{a, -\frac{a}{2}\}$.
- Si $|a| < 2$, alors $\Delta > 0$, et $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{3(4 - a^2)})$.
  Les deux racines de P sont distinctes l'une de l'autre, mais sont-elles distinctes de a?
  Pour le savoir, on calcule $P(a) = 3(a^2 - 1)$. On en déduit les résultats suivants :
  - Si $a = \pm 1$, alors $P(x) = (x - a)(x + 2a)$. Dans ce cas la classe d'équivalence de x se réduit à la paire $\{a, -2a\}$.
  - Si $|a| < 2$ et $a \neq \pm 1$, alors la classe d'équivalence de a contient exactement trois éléments. Ces trois réels distincts sont a, $\frac{1}{2}(-a - \sqrt{3(4 - a^2)})$ et $\frac{1}{2}(-a + \sqrt{3(4 - a^2)})$.

En fait, la meilleure réponse à la question du cardinal de la classe de a est graphique.

Considérons en effet le graphe Γ de $f : t \mapsto t^3 - 3t$. Soit A le point d'abscisse a de Γ.

Il faut compter en combien de points différents l'horizontale passant par A rencontre Γ.



On voit bien apparaitre les valeurs $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$, pour lesquelles l'horizontale coupe le graphe de f en deux points (ce sont les deux droites tracées en pointillés).

On voit enfin que pour une valeur de a distincte des quatre précédentes, l'horizontale passant par A coupe Γ en le seul point A si $|a| > 2$ et en trois points distincts (dont A) si $|a| < 2$.

Corrigé de l'exercice 1.4.2

Tout comme sa définition, la relation $\mathcal{S}$ est symétrique.

Pour tout x de E, on a $x\,\mathcal{R}\,x$ donc $x\,\mathcal{S}\,x$: $\mathcal{S}$ est réflexive.

Soient x, y, z dans E tels que $x\,\mathcal{S}\,y$ et $y\,\mathcal{S}\,z$. On a donc $\begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y \\ y\,\mathcal{R}\,x \end{cases}$ et $\begin{cases} y\,\mathcal{R}\,z \\ z\,\mathcal{R}\,y \end{cases}$.

De $x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,z$, on tire $x\,\mathcal{R}\,z$ (transitivité de $\mathcal{R}$).

De même, ($z\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,x$) impliquent $z\,\mathcal{R}\,x$.

Ainsi ($x\,\mathcal{R}\,z$ et $z\,\mathcal{R}\,x$), c'est-à-dire $x\,\mathcal{S}\,z$: la relation $\mathcal{S}$ est donc transitive.

Conclusion : $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

Corrigé de l'exercice 1.4.3

L'erreur vient du fait que pour tout x on suppose l'existence d'un y dans E tel que $x\,\mathcal{R}\,y$.

Supposons par exemple que E soit réduit à une paire $\{x, y\}$ et que la relation $\mathcal{R}$ soit définie par le *seul* $x\,\mathcal{R}\,x$, alors $\mathcal{R}$ est symétrique et transitive sans être réflexive.

Corrigé de l'exercice 1.4.4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(a,b) = ab$.

Avec cette notation $(x,y)\,\mathcal{R}\,(z,t) \Leftrightarrow f(x,y) = f(z,t)$. La réflexivité, la symétrie et la transitivité de $\mathcal{R}$ sont alors évidentes : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont définies par les égalités $xy = a$, où a est un réel donné.

Si $a \neq 0$, on trouve les points de l'hyperbole équilatère d'équation $y = \dfrac{a}{x}$.

Si $a = 0$, on trouve la réunion des deux axes $x = 0$ et $y = 0$.

La relation $\mathcal{S}$ n'est pas d'équivalence car elle n'est pas transitive. On en effet, on constate que $(1,0)\,\mathcal{S}\,(0,0)$ et que $(0,0)\,\mathcal{S}\,(-1,0)$, mais on n'a pas $(1,0)\,\mathcal{S}\,(-1,0)$.

Corrigé de l'exercice 1.4.5

La relation $\mathcal{R}$ n'est pas transitive. En effet, si A et B sont deux points qui ne sont pas alignés avec O (donc qui ne vérifient pas $A\,\mathcal{R}\,B$), on a pourtant $A\,\mathcal{R}\,O$ et $O\,\mathcal{R}\,B$.

Si on remplace $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P} - \{O\}$, on a $M\,\mathcal{R}\,N \Leftrightarrow \exists\,\lambda > 0$ tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{ON}$.

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les demi-droites issues (et privées) de l'origine.

Corrigé de l'exercice 1.4.6

- Soit x un élément de E. On a $x\,\mathcal{R}\,x$ donc $x\,\mathcal{S}\,x$: avec les notations de l'énoncé on choisit en effet $n = 1$ et $x_0 = x_1 = x$. La relation $\mathcal{S}$ est donc réflexive.
- Soient x et y deux éléments de E tels que $x\,\mathcal{S}\,y$.
  Il existe donc $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que $x = x_0, x_0\,\mathcal{R}\,x_1, x_1\,\mathcal{R}\,x_2, \ldots, x_{n-1}\,\mathcal{R}\,x_n, x_n = y$.
  En utilisant la symétrie de $\mathcal{R}$, on trouve : $y = x_n, x_n\,\mathcal{R}\,x_{n-1}, \ldots, x_2\,\mathcal{R}\,x_1, x_1\,\mathcal{R}\,x_0, x_0 = x$.
  Ce résultat implique $y\,\mathcal{S}\,x$. La relation $\mathcal{S}$ est donc symétrique.
- Soient x, y, z trois éléments de E tels que $x\,\mathcal{S}\,y$ et $y\,\mathcal{S}\,z$.
  Il existe $p \geq 1$ et $a_0, a_1, \ldots, a_p$ tels que $x = a_0, a_0\,\mathcal{R}\,a_1, a_1\,\mathcal{R}\,a_2, \ldots, a_{p-1}\,\mathcal{R}\,a_p, a_p = y$.
  Il existe $q \geq 1$ et $b_0, b_1, \ldots, b_q$ tels que $y = b_0, b_0\,\mathcal{R}\,b_1, b_1\,\mathcal{R}\,b_2, \ldots, b_{q-1}\,\mathcal{R}\,b_q, b_q = z$.
  Posons $n = p + q$ et $x_0 = a_0, \ldots, x_p = a_p, x_{p+1} = b_1, \ldots, x_n = b_q$.
  Avec ces notations, on a : $x = x_0, x_0\,\mathcal{R}\,x_1, x_1\,\mathcal{R}\,x_2, \ldots, x_{n-1}\,\mathcal{R}\,x_n, x_n = z$.
  Ainsi $x\,\mathcal{S}\,z$. La relation $\mathcal{S}$ est transitive. C'est une relation d'équivalence.

Corrigé de l'exercice 1.4.7

- On suppose que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Soient x, y deux éléments de E.
  Supposons $x\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,y$. On en déduit $y\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,x$ par symétrie de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
  Il existe donc z dans E tel que $y\,\mathcal{R}\,z$ et $z\,\mathcal{S}\,x$.
  Mais $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques. On a donc $x\,\mathcal{S}\,z$ et $z\,\mathcal{R}\,y$. On en déduit $x\,\mathcal{R} \circ \mathcal{S}\,y$.
  Réciproquement, $x\,\mathcal{R} \circ \mathcal{S}\,y$ implique $y\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,x$ puis $x\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,y$.
  Ainsi $x\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x\,\mathcal{R} \circ \mathcal{S}\,y$: les relations $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ sont identiques.

- On suppose maintenant que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.
  - ◇ Soit x un élément de E. On a $x\,\mathcal{R}\,x$ et $x\,\mathcal{S}\,x$ car $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives.
    Ainsi $x\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,x$. La relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est donc réflexive (on n'a pas utilisé $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$).
  - ◇ Soient x, y deux éléments de E tels que $x\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,y$.
    Il existe donc z dans E tel que ($x\,\mathcal{R}\,z$ et $z\,\mathcal{S}\,y$).
    Les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ étant symétriques, on en déduit ($y\,\mathcal{S}\,z$ et $z\,\mathcal{R}\,x$).
    Autrement dit, on a $y\,\mathcal{R} \circ \mathcal{S}\,x$. Or par hypothèse $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
    On en déduit $y\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,x$, ce qui prouve que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est symétrique.
  - ◇ Soient x, y, z dans E tels que $x\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,z$.
    Compte tenu de l'hypothèse, on peut écrire $x\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R} \circ \mathcal{S}\,z$.
    Il existe donc a et b dans E tels que $\begin{cases} x\,\mathcal{R}\,a \\ a\,\mathcal{S}\,y \end{cases}$ et $\begin{cases} y\,\mathcal{S}\,b \\ b\,\mathcal{R}\,z \end{cases}$
    En utilisant la transitivité de $\mathcal{S}$, on trouve $x\,\mathcal{R}\,a$ et $\begin{cases} a\,\mathcal{S}\,b \\ b\,\mathcal{R}\,z \end{cases}$
    Ce dernier système implique $a\,\mathcal{R} \circ \mathcal{S}\,z$, ou encore $a\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,z$.
    Ainsi on a $x\,\mathcal{R}\,a$ et il existe c tel que $\begin{cases} a\,\mathcal{R}\,c \\ c\,\mathcal{S}\,z \end{cases}$.
    On en déduit $x\,\mathcal{R}\,c$ car $\mathcal{R}$ est transitive.
    Le système $\begin{cases} x\,\mathcal{R}\,c \\ c\,\mathcal{S}\,z \end{cases}$ conduit enfin à $x\,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\,z$.
    On a ainsi prouvé que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est transitive. C'est une relation d'équivalence.

Corrigé de l'exercice 1.4.8

On note f l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(m, n) = \frac{m}{n}$.

Avec cette notation $(m, n)\,\mathcal{R}\,(p, q) \Leftrightarrow f(m, n) = f(p, q)$.

La réflexivité, la symétrie et la transitivité sont alors évidentes.

$\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence.

Remarque :

Le résultat est faux si on remplace $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par $\mathbb{N}^2$.

En effet on a alors $(1, 0)\,\mathcal{R}\,(0, 0)$ et $(0, 0)\,\mathcal{R}\,(0, 1)$ mais pas $(1, 0)\,\mathcal{R}\,(0, 1)$.

Corrigé de l'exercice 1.4.9

Remarquons que la relation "égalité" sur E vérifie les trois propriétés.

Réciproquement, soit $\mathcal{R}$ réflexive, symétrique et antisymétrique.

D'une part, pour tout x de E on a $x\,\mathcal{R}\,x$.

D'autre part, si x et y sont deux éléments de E tels que $x\,\mathcal{R}\,y$, alors on $y\,\mathcal{R}\,x$ par symétrie et donc $x = y$ par antisymétrie : $\mathcal{R}$ est donc la relation "égalité".

Corrigé de l'exercice 1.4.10

- Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence alors elle est réflexive et pour tous x, y de E, on a : $(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z \Rightarrow z \mathcal{R} x$ (on utilise la transitivité puis la symétrie.)
- Réciproquement, supposons que $\mathcal{R}$ possède les deux propriétés indiquées par l'énoncé.
  Soient x, y, z trois éléments quelconques de E.
  Si $x \mathcal{R} y$ alors $(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} y)$ en utilisant la réflexivité.
  L'une des deux hypothèses sur $\mathcal{R}$ donne alors $y \mathcal{R} x$: la relation $\mathcal{R}$ est symétrique.
  Si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ alors $z \mathcal{R} x$ (hypothèse sur $\mathcal{R}$) et donc $x \mathcal{R} z$ (symétrie).
  Ainsi $\mathcal{R}$ est transitive : c'est donc une relation d'équivalence.

Corrigé de l'exercice 1.4.11

- *Réflexivité* :

  Pour toute partie A de E, on a bien $A \mathcal{R} A$ car $A \cap X = A \cap X$ pour un élément X quelconque de $\mathcal{M}$ (et il en existe puisque $\mathcal{M}$ est supposé non vide).
- *Symétrie* :

  Soient A, B deux parties de E telles que $A \mathcal{R} B$, c'est-à-dire telles qu'il existe un élément X de M vérifiant $A \cap X = B \cap X$.
  On a évidemment $B \cap X = A \cap X$, ce qui prouve que $B \mathcal{R} A$.
- *Transitivité* :

  Soient A, B, C trois parties de E telles que $A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} C$.
  Il existe donc deux éléments X et Y de $\mathcal{M}$ tels que $A \cap X = B \cap X$ et $B \cap Y = C \cap Y$.
  Mais par hypothèse, il existe un Z dans $\mathcal{M}$ tel que $Z \subset X \cap Y$.

  On en déduit :
  ◇ $A \cap X \cap Z = B \cap X \cap Z$, c'est-à-dire $A \cap Z = B \cap Z$ (car $X \cap Z = Z$.)
  ◇ $B \cap Y \cap Z = C \cap Y \cap Z$, c'est-à-dire $B \cap Z = C \cap Z$ (car $Y \cap Z = Z$.)
  Il s'ensuit que $A \cap Z = C \cap Z$, ce qui prouve $A \mathcal{R} C$.
  La relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive : c'est une relation d'équivalence.

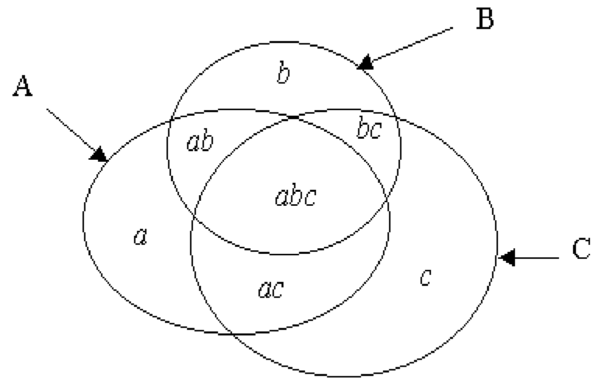
Corrigé de l'exercice 1.4.12

Pour tout $A \subset E$: $A \Delta A = \emptyset \Rightarrow \operatorname{card}(A \Delta A) = 0 \Rightarrow A \mathcal{R} A$: $\mathcal{R}$ est réflexive.

Pour toutes parties de A, B de E, on a $A \Delta B = B \Delta A$. La symétrie de sa définition implique donc la symétrie de la relation $\mathcal{R}$.

Soit A, B, C trois parties de E. On suppose $A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} C$.

Un dessin valant mieux qu'un long discours, on a représenté ici les trois ensembles A, B, C (dans une configuration générique), et on désigne par a, b, c, ab, ac, bc, abc les cardinaux des sous-ensembles délimités comme indiqué ci-dessous.



On a ainsi :

$\text{Card}\,(A\Delta B) = a + ac + b + bc, \text{Card}\,(B\Delta C) = b + ab + c + ac, \text{Card}\,(A\Delta C) = a + ab + c + bc$

Par hypothèse, il existe deux entiers m et n tels que $\begin{cases} \text{Card}\,(A\Delta B) = 2m \\ \text{Card}\,(B\Delta C) = 2n \end{cases}$

Or on remarque que :

$$\begin{aligned} \text{Card}\,(A\Delta B) + \text{Card}\,(B\Delta C) &= (a + ac + b + bc) + (b + ab + c + ac) \\ &= (a + c + ab + bc) + 2(b + ac) \\ &= \text{Card}\,(A\Delta C) + 2(b + ac) \end{aligned}.$$

On en déduit que $\text{Card}\,(A\Delta C) = 2(m + n - b - ac)$ est un entier pair.

Ainsi $A\,\mathcal{R}\,C$: la relation $\mathcal{R}$ est transitive.

Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.