إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: رمضان 1431 هـ

النهايات – الاشتقاقية

Limites – Dérivés

تمرين1

احسب النهايات للدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D_f في كل حالة من الحالات التالية:

.1 $f(x)=3x^2+2|x|+7$ **.2** $f(x)=-x^3+2x^2$

.3 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x-2}$ **.4** $f(x)=1+\dfrac{3+4x}{1-2x}$

.5 $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2+x+1}$ **.6** $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x^2-4x-5}$

.7 $f(x)=1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}$ **.8** $f(x)=\dfrac{3}{(x-4)^2}$

.9 $f(x)=\dfrac{-3x^3+6x+4}{x^2+2}$ **.10** $f(x)=1+\dfrac{3x}{1-4x^2}$

.11 $f(x)=3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{1-x}$ **.12** $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

.13 $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}$ **.14** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

.15 $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-3}$

تمرين2

احسب النهايات التالية:

.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1-\dfrac{4}{x}\right)$ **.2** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3}{(x+1)^2}$

.3 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2+7x-3}{x^2}$ **.4** $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-3}\dfrac{x+2}{x^2+3x}$

.5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+4x}\right)$ **.6** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+9}}{x}$

.7 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-4x}{x-2}$ **.8** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$

.9 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}$ **.10** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$

.11 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-x-2}$ **.12** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

.13 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}$ **.14** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$

.15 $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-4x-21}{x-4-\sqrt{x+2}}$ **.16** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$

.17 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-6x+10}+x+2\right)$ **.18** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$

.19 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$ **.20** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{\tan 2x}$ **.21** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin x}$

.22 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sin(4x-2)}{2x-1}$ **.23** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+3x}{x^2+\sin x}$

.24 $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x>\pi}}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **.25** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^2 x}$

$\frac{11}{4}$	8	4	$-\sqrt{3}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
1	5	$\frac{1}{2}$	12	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-3
		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	3	2	α	$\frac{3}{2}$	2

تمرين3

احسب النهايات التالية باستعمال مبرهنة المقارنة:

.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+1+\sin x$ **.2** $\lim\limits_{x\to-\infty}3x+\sin 2x$

.3 $\lim\limits_{x\to-\infty}-2x^2+x\cos x$ **.4** $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x}{2-\sin x}$

.5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin 2x^2}{x^2+1}$ **.6** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\cos x}{1+x}$

2	0	$+\infty$, $-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

تمرين4

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـــ:

$$f(x)=\frac{-x^2+5x+5}{x-3}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل $x\neq 3$ فإن: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$

2) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

3) بين أن $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.

4) ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمسقيم المقارب المائل (Δ).

11 ; 2 ; -1

تمرين5

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـــ:

$$f(x)=\frac{2x^3-11x^2+25x-27}{x^2-4x+4}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث من أجل كل $x\neq 2$ فإن: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{(x-2)^2}$

2) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

3) بين أن $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.

4) ادرس وضعية (C) بالنسبة للمسقيم المقارب المائل (Δ).

-5 ; 5 ; -3 ; 2

تمرين6

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty\,,0]\cup[2\,,+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x}-2x+1$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-3x+2)\right]$،

استنتج وجود مستقيمين مقاربين للمنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f.

تمرين7

– الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـــ:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+x-1}{x+2}$$

– الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $g(x)=x^2+1$

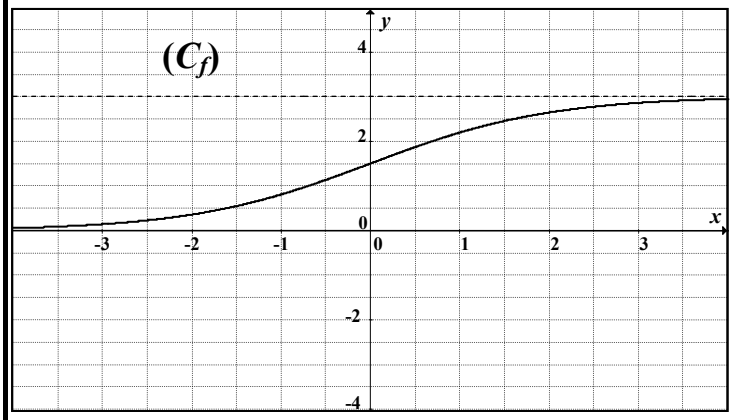
1) عين العدد الحقيقي a بحيث من أجل كل $x\neq -2$ فإن:

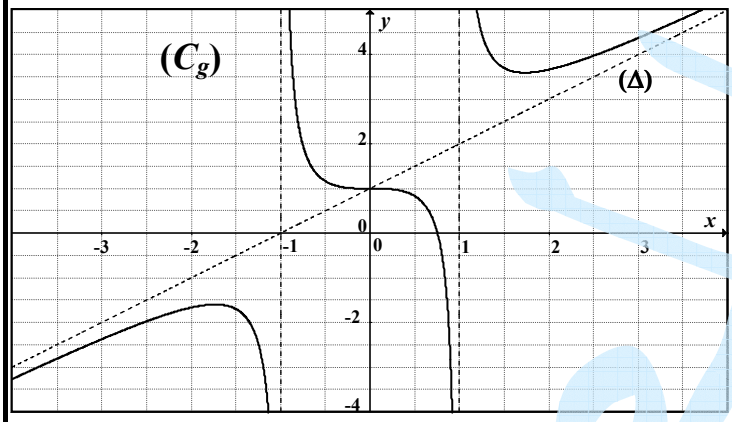
$$f(x)=g(x)+\frac{a}{x+2}$$

2) احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]$ ثم فسّر بيانيا النتيجة.

تمرين8

إليك بيانين لدالتين f و g:





1) بقراءة بيانية عين مجموعة تعريف كل دالة.

2) خمّن النهايات عند حدود مجال تعريف كل دالة.

3) عين المستقيمات المقاربة لكل منحن واكتب معادلاتها.

4) ادرس وضعية (C_g) بالنسبة لمسقيمها المقارب المائل (Δ).

5) ما هو عدد حلول المعادلـــة $g(x)=0$؟ احصـــره بـــين عددين صحيحين متتابعين.

تمرين9

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{|x|} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$$

ادرس استمرارية الدالة f عند $x_0=0$.

تمرين10

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x+2} & x\neq -2 \\ f(-2)=-4 \end{cases}$$

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=-2$.

2) ادرس استمرارية الدالة f عند $x_0=-2$.

تمرين11

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1} & x>1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+3} & x\leq 1 \end{cases}$$

1) بيّن أن الدالة f مستمرة عند $x_0=1$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=1$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة.

تمرين12

احسب مشتق الدالة f في كل حالة من الحالات التالية وذلك بعد تحديد D_f و $D_{f'}$.

1. $f(x)=x^3-4x+5$
2. $f(x)=(x^2-1)^3$
3. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+3x+4}$
4. $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-5}{2x+1}$
5. $f(x)=\dfrac{4}{(2x+3)^2}$
6. $f(x)=\dfrac{4}{(2\sin x+3)^2}$
7. $f(x)=\sqrt{3x-6}$
8. $f(x)=\sqrt{2+\cos 2x}$
9. $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$
10. $f(x)=x+\sin^3(\pi x)$
11. $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$
12. $f(x)=|x^2+4x-5|$

تمرين13

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$-{-2} بـــ: $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$

عين العددين الحقيقين α و β بحيث المنحني الممثل للدالة f عند النقطة (1,-3) يقبل مماسا معامل توجيهه $\frac{2}{3}$.

-7 ; -3

تمرين14

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f:x\mapsto ax^2+bx+c$

عين الأعداد الحقيقية a ، b و c $(a\neq 0)$ بحيث المنحني الممثل للدالة f يشمل النقطة (0,3) ويقبل مماسا في $\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{8}\right)$ موازيا لحامل محور الفواصل.

3 ; -5 ; 2

تمرين15

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$-{$\frac{3}{2}$} بـــ: $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{2x-3}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) بين أن f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها.

2) بين أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل عند نقطتين A و B مماسين ميل كل منهما يساوي -4 . اكتب عندئذ معادلة كل مماس عند نقطتي التماس A و B .

3) عين نقطتين C و D من $(\mathscr{C})$ بحيث يقبل عندهما المنحني $(\mathscr{C})$ مماسا يشمل النقطة $\left(-3,\frac{4}{25}\right)$.

$(-1,\frac{4}{5})$; $(-21,-\frac{44}{5})$	$y=-4x+4$ $y=-4x+13$	(1 ,0) , (2,5)

تمرين16

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^3+mx+1$

1) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد القيم الحدية للدالة f .

2) عين قيمة m بحيث المنحني الممثل للدالة f يقبل مماسا معادلته $y=3x+1$ عند $x_0=0$.

3

تمرين17

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f:x\mapsto x^3+3x^2+5x+1$

1) ادرس تغيرات الدالة f واستنتج أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $I=\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

2) هل المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلولا أخرى في $\mathbb{R}$ ؟

3) استنتج إشارة $f(x)$.

تمرين18

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2,1[\cup]1,+\infty[$ بـــ:

$$f:x\mapsto \frac{1}{x-1}-\sqrt{x+2}$$

1) احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f.

2) أنشئ جدول تغيرات f. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1<\alpha<2$. استنتج إشارة $f(x)$.

3) أعط حصرا للعدد α بتقريب 10^{-1}.

$1,5<\alpha<1,6$

تمرين19

الدالة f معرفة على $[-2,3]$ بـــ: $f:x\mapsto x^3-3x+1$

أنشئ جدول تغيرات الدالة f واستنتج عدد حلول المعادلات:

1) $f(x)=0$ 2) $f(x)=5$ 3) $f(x)=-5$

تمرين20

الدالة f معرفة على $D=[1,3]$ بـــ: $f(x)=\dfrac{8}{(x+1)^2}$

أنشئ جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج حصرا للعدد $f(x)$.

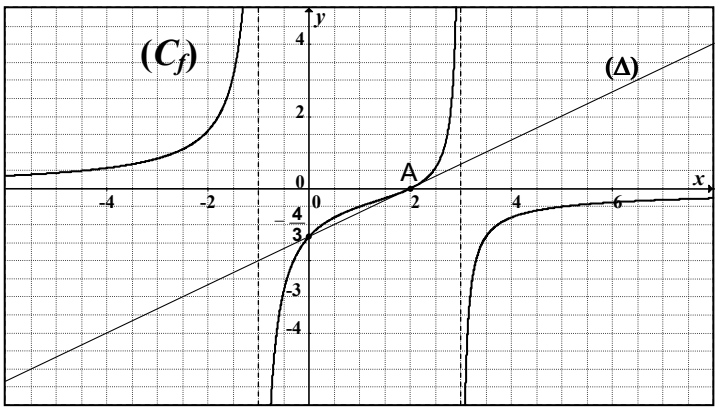
تمرين21

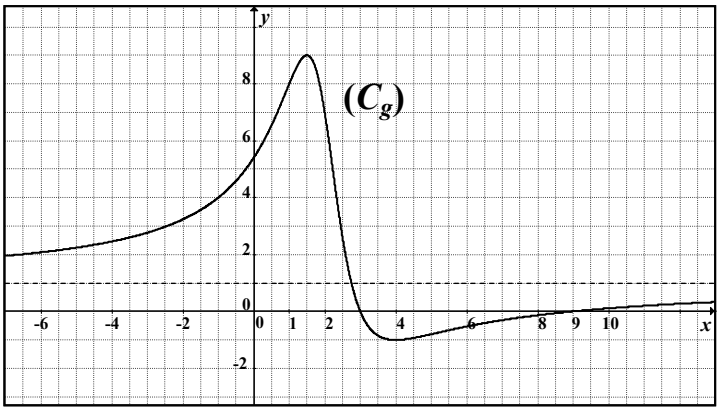
الدالة f معرفة على المجال D . أعط حصرا للعـــدد $f(x)$ (دون دراسة التغيرات) في كل حالة من الحالات التالية:

1. $f(x)=x^2+3x$ $\quad D=\left[-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right]$
2. $f(x)=\sqrt{2-3x}$ $\quad D=[-3,0]$
3. $f(x)=\dfrac{-3}{x(x-1)^2}$ $\quad D=[2,3]$

تمرين22

إليك بياني f و g حيث: $D_f=\mathbb{R}-\{-1,3\}$ و $D_g=\mathbb{R}$.





1) خمّن النهايات عند حدود مجال تعريف كل دالة.

2) عين بيانيا: $f(2)$ ، $f'(2)$ ، $g(4)$ و $g'(4)$.

3) أنشئ لكل دالة جدول تغيراتها ثم ادرس إشارة $f(x)$.

4) اكتب معادلة المماس (Δ) لـــ(C_f) عند النقطة A.

5) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس(Δ).

6) ناقش حسب قـــيم الوســـيط الحقيقـــي m عـــدد حلـــول المعادلة: $g(x)=m$ ؟

7) عين الأعداد الحقيقية a , b , c , d بحيث من أجل كل x من D_f فإن: $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+cx+d}$.

$2x-3y-4=0$	$a=-2$ ، $b=4$ ، $c=-2$ ، $d=-3$

تمرين23

لتكن f دالة عددية و(C) تمثيلها البيـــاني، بـــين أن $x=\alpha$ محور تناظر لـــ(C) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+7}{x^2-4x+3}$ $\quad \alpha=2$

2) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ $\quad \alpha=1$

3) $f(x)=2x^2-12x+2|x-3|-7$ $\quad \alpha=3$

تمرين24

لتكن f دالة عددية و(C) تمثيلها البياني، بين أن النقطة ω مركز تناظر لـــ(C) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=x^3-3x-2$ $\quad \omega(0,-2)$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+2}{x-1}$ $\quad \omega(1,6)$

3) $f(x)=[x+\pi+\tan 3x]\cos x$ $\quad \omega(-\pi,0)$

عبد المطلب