MATH

MR MERABTI CHANNEL

WWW.YOUTUBE.COM/MRMERABTI | FOR HIGH SCHOOL AND UNIVERSITY LEVEL

النهايات ، الإستمرارية و الإشتقاق

حلول تمارين مع الشرح خاصة بالنهايات، اضغط على رقم التمرين للمشاهدة

التمرين 1 – التمرين 2 – التمرين 3 – التمرين 4 - التمرين 5 – التمرين
6 – التمرين 7 – التمرين 8 – التمرين 9 – التمرين 10 – التمرين 11-
التمرين 12 – التمرين 13 – التمرين 14 – التمرين 15 – التمرين 16 –
التمرين 17 – التمرين 18- التمرين 19 – التمرين 20 – التمرين 21

الدوال الأسية و اللغرتم

حلول تمارين مع الشرح خاصة بالأسية، اضغط على رقم التمرين للمشاهدة

التمرين 1 – التمرين 2 – التمرين 3 – التمرين 4 - التمرين 5 – التمرين
6 – التمرين 7 – التمرين 8 – التمرين 9 - التمرين 10 – التمرين 11 –
التمرين 12 – التمرين 13 – التمرين 14 – التمرين 15 – حفظ الخواص

التكامل و الدوال الأصلية

حلول تمارين مع الشرح خاصة بالتكامل، اضغط على رقم التمرين للمشاهدة

التمرين 1 – التمرين 2 – التمرين 3 – التمرين 4 - التمرين 5 – التمرين
6 – التمرين 7 – التمرين 8 – التمرين 9 – التمرين 10 – التمرين 11

الهدف من القناة

نضع بين أيدي طلابنا هذه القناة الخاصة بالرياضيات لجميع المستويات التي أنجزت وفقا للمنهاج الذي أقرته وزارة التربية والتعليم.، و قد جاءت مقاطع هذه القناة مختصرة و غير مطوّلة و هادفة للإستفادة أكثر، لا تنسى الضغط على زر **الإشتراك** ليصلك جديدنا مع تمنيات إدارة القناة لكم بالتوفيق و النجاح.

اتصل بنا

www.facebook.com/merabti.math
www.youtube.com/MrMerabti
http://mrmerabti.blogspot.com
merabti.soufiane1@gmail.com

CHANNEL TWITTER FACEBOOK URL LINKEDIN

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام
و التكنولوجي

كتاب الأستاذ

المؤلفون:	**محمد فاتح مراد**	**مفتش التربية والتكوين**
	جمال تاوريرت	**مفتش التربية والتكوين**
	محمد قورين	**مفتش التربية والتكوين**
	عبد الحفيظ فلاح	**أستاذ التعليم الثانوي**
	عبد المؤمن موس	**أستاذ التعليم الثانوي**
	غريسي بلجيلالي	**أستاذ التعليم الثانوي**

كتاب الأستاذ

الشعب: • رياضيات

• تقني رياضي

• علوم تجريبية

www.facebook.com/merabti.math

www.youtube.com/MrMerabti

الجزء الأول

الباب الأول

النهايات و الاستمرارية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح:/

الهدف: مقاربة مفهوم نهاية منتهية لدالة عند عدد حقيقي.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " نهاية منتهية عند حقيقي " و يتم إنجازه ضمن أفواج.

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: مقاربة نهاية دالة مركبة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " نهايات دالة مركبة " و و يتم إنجازه ضمن أفواج كما يتم استعمال جهاز الداتاشو.

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم الاستمرارية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الاستمرارية " و يتم ضمن أفواج كما يتم استغلال جهاز الداتاشو.

الحل: بسيط.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مبرهنة القيم المتوسطة و تطبيقاتها.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " مبرهنة القيم المتوسطة " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

إزالة حالة عدم التعيين

تصحيح: /

الهدف: توظيف النهايات.

توجيهات: يقدم العمل في شكل أفواج .

الحل: بسيط

إيجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف

تصحيح: /

الهدف: توظيف مبرهنة القيم المتوسطة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج مع استعمال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف المراحل لبلوغ النتائج المتوخاة,.

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

1 (1 $2,9<f(x)<3,1$ معناه $2,9(x+1)<3x-2<3,1(x+1)$ لأن $x+1>0$

و منه $2,9(x+1)+2<3x<3,1(x+1)+2$ و منه $2,9x+4,9<3x<3,1x+5,1$

و منه $(3x-3{,}1x-5{,}1<0)$ و $(2{,}9x+4{,}9-3x<0)$

و منه $(-0{,}1x<5{,}1)$ و $(-0{,}1x<-4{,}9)$ و منه $\left(x>\dfrac{5{,}1}{-0{,}1}\right)$ و $\left(x>\dfrac{4{,}9}{0{,}1}\right)$ إذن $A=49$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

3) $f(x)-3=\dfrac{3x-2}{x+1}-3=\dfrac{-5}{x+1}$

$f(x)-3<0$ و منه C_f أسفل Δ.

11 نحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]$ ثم لدراسة الوضعية ندرس إشارة $f(x)-y$

ملاحظة: نفس الطريقة مع التمارين 8 ، 9 و 10.

2 ـ نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي

13 $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=3$ ،

$2{,}95\le f(x)\le 3{,}05$ يكافئ $2{,}95\le\dfrac{x+2}{x-2}\le 3{,}05$ و منه $2{,}95(x-2)-2\le x\le 3{,}05(x-2)-2$

أي $\left(x\ge\dfrac{8{,}1}{2{,}05}\right)$ و $\left(x\le\dfrac{7{,}9}{1{,}95}\right)$ ، إذن $3{,}951219512...\le x\le 4{,}051282051...$

يمكن أخذ $I=\left]3{,}95;4{,}05\right[$

14 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$ ، $f(x)>10^3$ معناه $3x+4>10^3(x-2)^2$ و منه $1000x^2-4003x+3996<0$

و منه $\dfrac{4003+\sqrt{40009}}{2000}<x<\dfrac{4003-\sqrt{40009}}{2000}$ و منه $1{,}901488751<x<2{,}101511249$.

يمكن أخذ $a=0{,}1$

3 ـ تتمات على النهايات

18

النهاية	عند $-\infty$	عند $+\infty$
أ)	$-\infty$	$+\infty$
ب)	$-\infty$	$-\infty$
ج)	$+\infty$	$-\infty$

19 أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x)=+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} f(x)=+\infty$

20 أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to2} f(x)=+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$.

21 أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ ، $\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$

ج) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to3^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to3^+} f(x)=-\infty$

22 أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ ،

$\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to4^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to4^+} f(x)=-\infty$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to3^+} f(x)=+\infty$

ج) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-2} f(x)=+\infty$.

26 أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) من أجل $x>0$ لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{3-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}$ ،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{3}$$

28 أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=0$$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x=+\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

29 **الحالة(1):** $D=\mathbb{R}-\{0;2\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ ،

$\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty$

الحالة(2): $D=\mathbb{R}-\{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$

الحالة(3): $D=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$ ،

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

4 ـ نهاية دالة مركبة ـ النهايات بالمقارنة

30 (1 $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\frac{3x+4}{x-3}=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\sqrt{\frac{3x+4}{x-3}}$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$

(4 $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3+x-3=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-2x^3+x-3}=+\infty$

31 : لدينا: على $]-2;2[$ $4-x^2>0$ و منه $\lim\limits_{x\to-2}\left(4-x^2\right)=0^+$ و $\lim\limits_{x\to 2}\left(4-x^2\right)=0^+$ و $\lim\limits_{X\to 0^+}\sqrt{X}=0^+$

إذن $\lim\limits_{x\to-2}\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}=-\infty$

32 (1 لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+4}{x^2-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

و $\lim\limits_{X\to 0}\cos X=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right)=1$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi x}{2x}=\frac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{X\to\frac{\pi}{2}}\cos X=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi x-1}{2x}\right)=0$

(3 $\lim\limits_{x\to-1}\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{\pi}{2}$ و منه $\lim\limits_{X\to\frac{\pi}{2}}\sin X=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=1$

و $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$

(4 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$ و منه $\lim\limits_{x\to 0}\left(\pi\frac{\sin x}{x}\right)=\pi$ و $\lim\limits_{X\to\pi}\cos X=-1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\pi\frac{\sin x}{x}\right)=-1$

35 لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-3=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

36 دينا $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^3=-\infty$ و بما أن $f(x)\le -2x^3$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

37 لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^4+x\right)=+\infty$ و بما أن $f(x)\ge\frac{1}{2}x^4+x$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

38 (1 لدينا $-1\le\cos x\le 1$ و منه $-2\le 2\cos x\le 2$ و منه $1\le 3+2\cos x\le 5$

(2 إذا كان : $x\to+\infty$ فإن $x-1\to+\infty$. $1\le 3+2\cos x\le 5$ تكافئ $\frac{1}{5}\le\frac{1}{3+2\cos x}\le 1$

و منه $\frac{x-1}{5}\le\frac{x-1}{3+2\cos x}\le x-1$. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{5}=+\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{3+2\cos x}=+\infty$

39 (1 $x^2-3\sin x-(x^2-3)=-3\sin x+3=3(1-\sin x)$ بما أن $-1\le\sin x\le1$ فإن $-1\le-\sin x\le1$ و

منه $0\le1-\sin x\le2$ ، إذن $x^2-3\sin x-(x^2-3)\ge0$

و بالتالي : $x^2-3\sin x\ge x^2-3$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3=+\infty$ و $x^2-3\sin x\ge x^2-3$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3\sin x=+\infty$

40 • عند $+\infty$ $(x>0)$: $-1\le\sin x\le1$ و منه $-2x\le2x\sin x\le2x$ و منه

$x^2-2x\le x^2+2x\sin x\le x^2+2x$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+2x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

• عند $-\infty$ $(x<0)$: $-1\le\sin x\le1$ و منه $2x\le2x\sin x\le-2x$ و منه

$x^2+2x\le x^2+2x\sin x\le x^2-2x$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-2x=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+2x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

41 (1 لدينا : : $-1\le\sin x\le1$ و منه $x-1\le x+\sin x\le x+1$ و منه $\dfrac{x-1}{2x+1}\le\dfrac{x+\sin x}{2x+1}\le\dfrac{x+1}{2x+1}$

(2 بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$

5 - الاستمرارية

43 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases}f(x)=x^2-2x+1\ ; & x\le2\\ f(x)=x^2+x-5\ ; & x>2\end{cases}$

(1 $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}x^2-2x+1=1$ و $f(2)=1$. إذن الدالة f مستمرة عند 2 على اليسار

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}x^2+x-5=1$ و $f(2)=1$. إذن الدالة f مستمرة عند 2 على اليمين

و منه الدالة f مستمرة عند 2 .

(2 نعم الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها مستمرة على $]-\infty;2[$ (كثير حدود) و على $]2;+\infty[$ (كثير حدود) و مستمرة عند 2.

6 - مبرهنة القيم المتوسطة

52 (1 $f(1)=\dfrac{3}{4}$ ، $f(0)=-\dfrac{1}{4}$ ، $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{8}$ ، $f(-1)=-\dfrac{5}{4}$

(2 نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على المجالات $\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$ ، $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$ و $[0;1]$.

56 • بما أن f مستمرة و رتيبة تماما على $]-3;0]$ و تأخذ قيمها في $]-2;+\infty[$ و بما أن $0\in]-2;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في المجال $]-3;0]$

• بما أن f مستمرة و رتيبة تماما على $[0;2[$ و تأخذ قيمها في $]-2;4[$ و بما أن $0\in]-2;4[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في المجال $[0;2[$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $-3<x_0<0$ و $0<x_1<2$

7 - الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

64 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، و من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x)=-3x^2+6x$

أ) $f'(x)=0$ معناه $(x=0)$ أو $(x=2)$ ، $f'(x)<0$ معناه $(x<0)$ أو $(x>2)$ ،

$f'(x)>0$ معناه $(0<x<2)$

ب)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

3) نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على كل مجال من المجالات $[-1;0]$ ، $[0;1]$ ، $[2;3]$

67 نعتبر الدالة $h:x\mapsto f(x)-g(x)$ و نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $\left[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}\right]$

تمارين للتعمق

2 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي

71 $a=2$ ، $b=3$ ، $c=-1$ و $d=-1$

72 1) $a=1$ ، $b=1$ ، $c=3$ و $d=-1$

2) $f(x)=x+1+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$ ، $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$

إذن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ معادلته $y=x+1$

3) ندرس إشارة $f(x)-(x+1)$: $f(x)-(x+1)=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$

$f(x)-(x+1)=0$ تكافئ $x=-\frac{2}{3}$ ، $f(x)-(x+1)<0$ تكافئ $x<-\frac{2}{3}$ ،

$f(x)-(x+1)>0$ تكافئ $x>-\frac{2}{3}$

(C) أعلى Δ في المجال $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ و (C) أسفل Δ في المجالين $]-\infty;-1[$ و $\left]-1;-\frac{2}{3}\right[$.

73 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$

2) $\Delta: y=x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

3) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}=-1$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x+5}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}=-2$$

ج) نستنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا Δ' عند $-\infty$ معادلته $y=-x-2$.

74 (1 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

(2 $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=0$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{3}{2}$

التخمين: (C_f) يقترب من المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+\frac{1}{2}$ عند $+\infty$ و لكن (C_g) لا يقترب من المستقيم عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{3}{2}$ معناه $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\right]=0$ أي $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x+2)\right]=0$

نستنتج أن المستقيم Δ' الذي معادلته $y=x+2$ مقارب للمنحني (C_g) عند $+\infty$.

3 - تتمات على النهايات

82 (1 $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x-3}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-3;1\}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

$\lim_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{x+1}{x^2+2x-3}=+\infty$ لأن $\lim_{x\xrightarrow{>}1}x+1=2$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}1}x^2+2x-3=0^+$

و بالمثل : $\lim_{x\xrightarrow{<}1}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}-3}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}-3}f(x)=+\infty$

(6 $f(x)=\frac{(x+2)^3-8}{x}$ ، $D_f=\mathbb{R}^*$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)^3-8}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و كذلك $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^3-8}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+2-2)\left((x+2)^2+2(x+2)+4\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\left(x^2+6x+12\right)}{x}=\lim_{x\to0}\left(x^2+6x+12\right)=12$$

88 من اجل كل عدد حقيقي x نضع: $g(x)=\sin 3x$ و $h(x)=2\cos x-1$ و $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

$$f(x)=\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}=\frac{\dfrac{\sin 3x-0}{x-\frac{\pi}{3}}}{\dfrac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}}=\frac{\dfrac{\sin 3x-\sin 3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}{\dfrac{2\cos x-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}=\frac{\dfrac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}{\dfrac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}$$

إذن $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\dfrac{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ لأن الدالتان g و h قابلتان للاشتقاق عند $\frac{\pi}{3}$ و $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)\neq 0$

لدينا : $g'(x)=3\cos 3x$ و $h'(x)=-2\sin x$

بما أن $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-3$ و $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ فإن $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\sqrt{3}$

90 (1 $\lim_{x\to 0}\sin 2x=0$ و $\lim_{x\to 0}\sqrt{1-\cos x}=0$ و منه لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}$$

إذا كان $x>0$ فإن : $l_1=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}2\times\dfrac{\frac{\sin 2x}{2x}\sqrt{1+\cos x}}{\frac{\sin x}{x}}=2\sqrt{2}$

(2 $l_2=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$ ، حالة عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$.

نضع: $X=x-\frac{\pi}{2}$ و منه $x=X+\frac{\pi}{2}$. إذا كان $x\to\frac{\pi}{2}$ فإن $X\to 0$

$$l_2=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x=\lim_{X\to 0}(\pi-\pi-2X)\tan\left(\frac{\pi}{2}+X\right)=\lim_{X\to 0}\frac{-2X}{-\tan X}=\lim_{X\to 0}\frac{2}{\frac{\tan X}{X}}=2$$

4 ـ نهاية دالة مركبة – النهايات بالمقارنة

101 (1 أولا نعين مجموعة التعريف:

$D_f=\mathbb{R}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي x : $x-\sqrt{x^2+1}<0$

لدينا: $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}+2x=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+2x=x-\sqrt{x^2+1}$

و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $x-\sqrt{x^2+1}<0$ ، إذن $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x<0$ أي $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$

(2 لدينا $-1\leq\sin x\leq 1$ و منه $0\leq 1+\sin x\leq 2$

و منه $0\leq x(1+\sin x)\leq 2x$ لأن : $x>0$

من : $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$ ينتج $\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x\left[x(1+\sin x)\right]$ أي $\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}<-4x^2$ أي

$f(x)<-4x^2$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}-4x^2=-\infty$. نستنتج أن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.