هذا المسالة موجه لشعبتي الرياضيات والعلوم

الكفائات المستهدفة دراسة الدوال الاستمرارية الاشتقاقية المستقيمات المقاربة

مسالة 1

لتكن f الدالة المعرفة على : $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=|x-2|+\dfrac{1}{x-1}$

وليكن (C_f) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

1/أكتب عبارة الدالة f دون رمز القيمة المطلقة

2/أدرس استمرارية الدالة f عند القيمة $x_0=2$

3/أ) أحسب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(2+h)-f(2)/h$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(2+h)-f(2)/h$,ماذا تستنتج؟

ب) اعط للنتيجة تفسيرا هندسيا

4/اكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2

5/أدرس تغيرات الدالة f

6/أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\alpha\in]0;1/2[$

7/أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+(x-2)\right]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]$ ماذا تستنتج؟

8/أرسم (Δ_1) و (Δ_2) والمستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f)

9/ناقش بيانيا وحسب قيم المتغير الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $|x-2|+\dfrac{1-m(x-1)}{(x-1)}=0$

أستنتج مما سبق عدد حلول المعادلة ذات المجهول θ : $|\cos\theta-2|+\dfrac{1-m(\cos\theta-1)}{(\cos\theta-1)}=0$

الحل

1/ عبارة الدالة f دون رمز القيمة المطلقة

$f(x)=|x-2|+\frac{1}{x-1}$ المعرفة على : $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

يجب معرفة قيمة x حيث $|x-2|=0$ يكافئ $x=2$

وبالتالي نكتب

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)+\frac{1}{x-1}\ldots\ldots x\in[2;+\infty[\\ -(x-2)+\frac{1}{x-1}\ldots x\in\cup]-\infty;1[\cup]1;2]\end{cases}$$

2/ استمرارية الدالة f عند القيمة $x_0=2$

حالة 1: $f(x)=(x-2)+\frac{1}{x-1}$ نحسب النهاية عند 2 نجد $\lim_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}2}(x-2)+\frac{1}{x-1}=1$ و $f(2)=1$ مستمرة عل اليمين

حالة 2: $f(x)=-(x-2)+\frac{1}{x-1}$ نحسب النهاية عند 2 نجد $\lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}2}-(x-2)+\frac{1}{x-1}=1$ و $f(2)=1$ مستمرة عل اليسار

الدالة قابلة للاستمرار عند 2 لانها مستمرة على يمين ويسار 2 اي $\lim_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=f(2)$

3/ أ)حساب : $\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(2+h)-f(2)/h$

نجد $f(2)=1$ و $f(2+h)=-h+\frac{1}{h+1}$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}0} h/(1+h)=0$ النهاية 0

حساب $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(2+h)-f(2)/h$ ،

نجد $f(2)=1$ و $f(2+h)=h+\frac{1}{h+1}$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}0} -h-2/(1+h)=2$ النهاية °2

نستنتج ان الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$

ب) هندسيا المنحنى يقبل مماسين عند النقطة ذات الفاصلة2 معامل توجيههما 0 و-2 على الترتيب

4/كتابة معادلتي المماسين $(\Delta_1),(\Delta_2)$ لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2

المماس (Δ_1)، معادلته $y=-2(x-2)+1=-2x+5$ أي $y_1=-2x+5$

المماس (Δ_2) معادلته $y=0(x-2)+1=1$ أي $y_2=1$

5/دراسة تغيرات الدالة f

اولا الاشتقاقية

الدالة تقبل الاشتقاق على المجال المفتوح $]-\infty;1[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[$

ملاحظة حذفنا 2 لعدم قابلية اشتقاق الدالة عليها

$$f'(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{(x-1)^2}\ldots\ldots x\in]2;+\infty[\\ -1-\frac{1}{(x-1)^2}\ldots x\in]-\infty;1[\cup]1;2[\end{cases}$$

ثانيا اشارة المشتقة

من اجل $x\in]2;+\infty[$ نجد $f'(x)\succ 0$

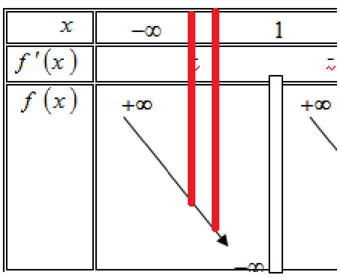
لاحظ انه لما $x\in]-\infty;1[\cup]1;2[$ لا تنعدم وهي سالبة تماما على بقية المجال

لاحظ كذلك $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

و $\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=+\infty$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	-	‖	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



6/أثبات أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\alpha \in]0;1/2[$

في المجال $]1;+\infty[$ $f(x)>1$ ومنه المنحنى لا يقطع محور الفواصل في هذا المجال.

وفي المجال $]-\infty;1[$ الدالة مستمرة و متناقصة تماما وبالأخص على المجال $]0;\frac{1}{2}[$ و $f(0)\times f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

(لأن $f(0)=1$ و $f(0.5)=-0.5$) ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحني يقطع محور الفواصل على المجال $]-\infty;1[$ نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\alpha \in]0;\frac{1}{2}[$.

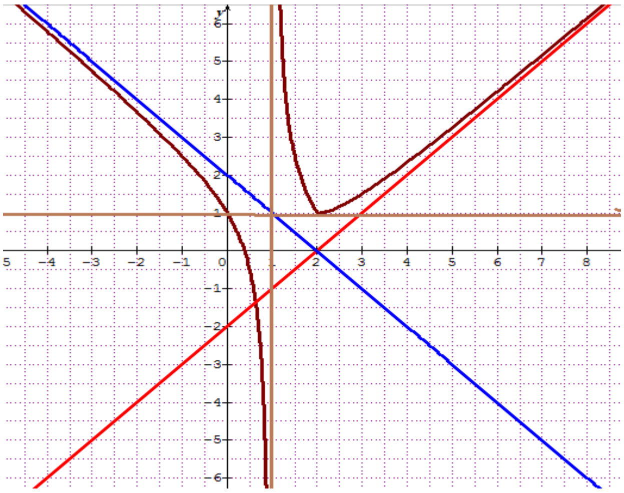
الخلاصة: المنحني يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\alpha \in]0;\frac{1}{2}[$

7/حساب :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+(x-2)\right] \text{ يعني } \lim_{x\to-\infty} -(x-2)+\frac{1}{x-1}+(x-2)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right] \text{ ماذا تستنتج؟ } \lim_{x\to+\infty}(x-2)+\frac{1}{x-1}-(x-2)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$$

المستقيمين ذو المعادلتين $y_1=(x-2), y_2=-(x-2)$ **مقاربين مائلين للمنحنى** (C_f)



7) المناقشة البيانية للمعادلة

$|x-2|+\frac{1-m(x-1)}{(x-1)}=0$ بعد التفكيك

تصبح $|x-2|+\frac{1}{(x-1)}=m$ أي $f(x)=m$

لما $m=0$ يصبح $|x-2|+\frac{1}{(x-1)}=0$ المعادلة

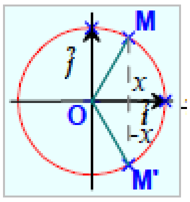
تقبل حل وحيد في المجال $[0;1/2]$

لما $m\neq 0$ نناقش افقيا

لما $m=1$ المعادلة تقبل حلين

لما $m\in]1;+\infty[$ للمعادلة ثلاث حلول حلين موجبين وحل سالب

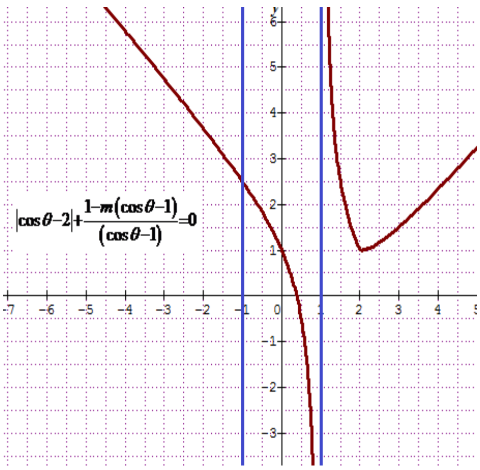
لما $m\in]-\infty;1[$ للمعادلة حل وحيد موجب



مما سبق عدد حلول المعادلة ذات المجهول θ: $|\cos\theta-2|+\frac{1-m(\cos\theta-1)}{(\cos\theta-1)}=0$

نرسم المستقيمين ذو المعادلتين $x=1$ و $x=-1$ لأن $-1\geq\cos\geq 1$ شكل 2

نعلم ان دالة $\cos x$ تقبل حلين لهما نفس الترتيب في الربعين الاول والرابع



ومنه $|\cos\theta-2|+\frac{1}{(\cos\theta-1)}=m$ المناقشة الافقية :

$m\in]2,5;+\infty[$ لاتقبل المعادلة حلول لان الحلول الاخرى ليست محصورة بين 1 و-1

$m\in]-\infty;2,5[$ تقبل في كل فاصلة حلين

$m=2.5$ المعادلة لها حل وحيد من الشكل π