الموضوع السادس

موضوع الاختبار رقم 6 لتحضير امتحان شهادة البكالوريا
شعبة العلوم التجريبية

التمرين الأول (4 نقاط) :

نعرف متتالية عددية (u_n) بحدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

1) أ) أحسب : $u_2 ; u_1$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 < u_n < 1$.

ج) بين أن : (u_n)متزايدة .

2) نعتبر المتتالية (v_n)حيث : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$ ، n من IN .

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية متقاربة . ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n .

ج) استنتج أن (u_n) متقاربة . ما هي نهايتها ؟ .

التمرين الثاني (5 نقاط):

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ ولتكن النقطة M_n لاحقتها z_n حيث :

$z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n \left(1 + i\sqrt{3}\right) \quad . n \in IN$

1) أكتب z_{n+1} بدلالة z_n . ماذا تستنتج ؟ .

2) أكتب كلا من : $z_4 ; z_3 ; z_2 ; z_1 ; z_0$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي .

3) عين المسافة : OM_n بدلالة n .

4) أثبت أن المسافة : $M_n M_{n+1} = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. استنتج المسافتين : $M_0 M_1$ ثم $M_1 M_2$

5) نضع : $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + ... + M_n M_{n+1}$ أحسب : L_n بدلالة n ثم عين : $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n$

التمرين الثالث (4 نقاط):

يحتوي كيس على 5 كريات بيضاء و7 كريات حمراء ، لا نفرق بينها باللمس .

1. يسحب لاعب عشوائيا 3 كريات في آن واحد .

أ– احسب احتمالات الحوادث التالية : A : يسحب اللاعب كرية بيضاء واحدة فقط .

B : يسحب اللاعب كريتين بيضاويتين فقط . C : يسحب اللاعب 3 كريات بيضاء.

ب- يربح اللاعب 10 دنانير من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة ، وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الربح المحصل عليه .

عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي .

2. يسحب اللاعب كرية من الكيس إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء يربح اللاعب 10 دنانير و يتوقف اللعب . بينما إذا كانت الكرية المسحوبة سوداء، يعيد اللاعب الكرية المسحوبة إلى الكيس ويسحب كرية أخرى في نفس الظروف ، تتكرر العملية ويتوقف اللعب تلقائيا عند السحب الثالث (للاعب سحبة أو سحبتان أو ثلاث سحبات).

احسب احتمال الحوادث التالية : D : يربح اللاعب في السحب الأول . E : يربح اللاعب في السحب الثاني . F : يربح اللاعب في السحب الثالث . G : لا يربح اللاعب أي شيء.

<u>التمرين الرابع</u> (07 ن):

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . وحدة الطول $2cm$.

أ) g دالة معرفة على R بـــ : $g(x)=ax+b-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ ، a و b عددان حقيقيان .

1. احسب مشتقة الدالة g .

2. عين العددين a و b علما أن التمثيل البياني للدالة g يشمل النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ و يقبل في النقطة A مماسا موازيا لمحور الفواصل .

ب) f دالة معرفة على R بـــ : $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$.

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=x-2+\dfrac{8}{e^x+2}$.

2. احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f .

أ- بين أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (d_1) و (d_2) معادلتيهما : $y=x+2$ و $y=x-2$ عند $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب .

ب-ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى كل من (d_1) و (d_2).

ج- ارسم (d_1) ، (d_2) و (C) .

د- احسب بالـــ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=x+2$ و $x=0$ و $x=\ln 2$.

إجابة الموضوع السادس

تصحيح موضوع الاختبار رقم 6 لتحضير امتحان شهادة البكالوريا
الشعبة:علوم تجريبية

التمرين الأول (4 نقاط): أ) حساب : $u_2;u_1$.بالتعويض نجد $u_1=\frac{3}{4}$ و $u_2=\frac{18}{19}$

ب) إثبات أن : $0<u_n<1$ وذلك بالاستدلال بالتراجع : $(0<u_n)$ وَ $(u_n<1)$

. نتحقق من صحة الخاصية من أجل : $u_1=\frac{3}{4}$ موجب

نفرض صحة الخاصية $u_n>0$ ونبرهن صحة $u_{n+1}>0$

. نتحقق من صحة الخاصية من أجل : $u_1=\frac{3}{4}$ أصغر من 1

نفرض صحة الخاصية : $u_n<1$ ونبرهن صحة $u_{n+1}<1$

ندرس إشارة $u_{n+1}-1$:

لدينا : $u_{n+1}-1=\frac{2u_n+3}{u_n+4}-1=\frac{u_n-1}{u_n+4}$ وبما أن $u_n<1$ حسب فرضية التراجع فإن : $u_{n+1}<1$

ج)إثبات أن (u_n) متزايدة : ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+3}{u_n+4}-u_n=\frac{-u_n^2-2u_n+3}{u_n+4}=\frac{(-u_n+1)(u_n+3)}{u_n+4}$ وبالتالي: (u_n) متتالية متزايدة تماما

2) أ) إثبات أن(v_n) متتالية هندسية : لدينا : $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_n+3}=\frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3}=\frac{2u_n+3-u_n-4}{2u_n+3+3u_n+12}=\frac{u_n-1}{5u_n+15}$

$v_{n+1}=\frac{1}{5}\left(\frac{u_n-1}{u_n+3}\right)=\frac{1}{5}v_n$ إذن :(v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{5}$ وحدها الأول $v_0=-\frac{1}{3}$ وهي متقاربة لأن أساسها $0<q<1$

ب)حساب v_n ثم u_n بدلالة n لدينا: $v_n=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n$ ومنه نجد $u_n=\frac{3v_n+1}{1-v_n}$ أي : $u_n=\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

ج) استنتاج أن(u_n) متقاربة ونهايتها : بما أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1 ومتزايدة تماما فإنها متتالية متقاربة ونهايتها :

$$\lim_{x\to+\infty}u_n=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}=+1$$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$

التمرين الثاني (5 نقاط): 1) كتابة : z_{n+1} بدلالة z_n .

$.n\in IN$ $$z_{n+1}=\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}\left(1+i\sqrt{3}\right)=\left(\frac{1}{2}i\right)\times\left(\frac{1}{2}i\right)^n\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

ومنه نجد : $z_{n+1}=\left(\frac{1}{2}i\right)z_n$

2) أكتب كلا من : $z_0;z_1;z_2;z_3;z_4$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي .

إجابة الموضوع السادس

الشكل الاسي	الشكل الجبري
$Z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$	$Z_0 = 1 + i\sqrt{3}$
$Z_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$Z_1 = \left(\frac{1}{2}i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
$Z_2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$Z_2 = \left(\frac{1}{2}i\right)^2\left(1+i\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$
$Z_3 = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}$	$Z_3 = \left(\frac{1}{2}i\right)^3\left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$
$Z_4 = \frac{1}{8}e^{i\frac{\pi}{3}}$	$Z_4 = \left(\frac{1}{2}i\right)^4\left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i$

3) تعيين المسافة : OM_n بدلالة n .لدينا : $OM_n = |z_n| = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^n\left(1+i\sqrt{3}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^n\right|\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)\right|$

$$OM_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

4) أثبت أن : $M_nM_{n+1} = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لدينا : $M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)z_n - z_n\right| = \left|\left(\frac{1}{2}i - 1\right)z_n\right| = \left|\frac{1}{2}i - 1\right||z_n|$

$M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ استنتاج: $M_0M_1 = \sqrt{5}$ و $M_1M_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$

5) حساب المجموع : $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + ... + M_nM_{n+1}$

لدينا : $L_n = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

نلاحظ أن : $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ هومجموع n+1 حدا للمتتالية الهندسية

التي حدها الأول 1 وأساسها $\frac{1}{2}$ وبالتالي يكون : $L_n = 2\sqrt{5}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ ومنه يكون : $\lim_{n\to+\infty} L_n = 2\sqrt{5}$

التمرين الثالث (4 نقاط):

1. يسحب لاعب عشوائيا 3 كريات في آن واحد من بين 12 كرية (5 ب+7 س).

أ- احتمال الحوادث التالية : A : $p(A) = \frac{C_5^1 C_7^2}{C_{12}^3} = \frac{5 \times \frac{7\times 6}{2}}{\frac{12\times 11\times 10}{3\times 2}} = \frac{21}{44}$

B : $p(B) = \frac{C_5^2 C_7^1}{C_{12}^3} = \frac{7 \times \frac{5\times 4}{2}}{\frac{12\times 11\times 10}{3\times 2}} = \frac{7}{22}$. C : $p(C) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2}}{\frac{12\times 11\times 10}{3\times 2}} = \frac{1}{22}$.

ب-قانون احتمال المتغير العشوائي X : لدينا : $p(X=10) = p(A)$ ، $p(X=20) = p(B)$ ،

$p(X=30) = p(C)$ ، $p(X=0) = 1 - \left[p(A) + p(B) + p(C)\right] = \frac{7}{44}$

إجابة الموضوع السادس

x_i	0	10	20	30
$p(X = x_i)$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

الأمل الرياضياتي : $E(X) = 0 \times \frac{7}{44} + 10 \times \frac{21}{44} + 20 \times \frac{14}{44} + 30 \times \frac{2}{44} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$.

2. نرمز بـــ s إلى سحب كرية بيضاء و بـــ $\bar{s}$ إلى سحب كرية سوداء.

احتمال الحوادث التالية : : $p(D) = p(s) = \frac{5}{12}$. $p(E) = p(\bar{s} \cap s) = \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$

$p(F) = p(\bar{s} \cap \bar{s} \cap s) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{245}{1728}$. $p(G) = p(\bar{s} \cap \bar{s} \cap \bar{s}) = \left(\frac{7}{12}\right)^3 = \frac{343}{1728}$.

ملاحظة : يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات .

التمرين الرابع : (07ن) أ) 1. $g'(x) = a - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2}$

2. لدينا : $g(\ln 2) = \ln 2$ و $g'(\ln 2) = 0$. أي : $a - \frac{16}{16} = 0$ أي $a = 1$ و $b = 2$.

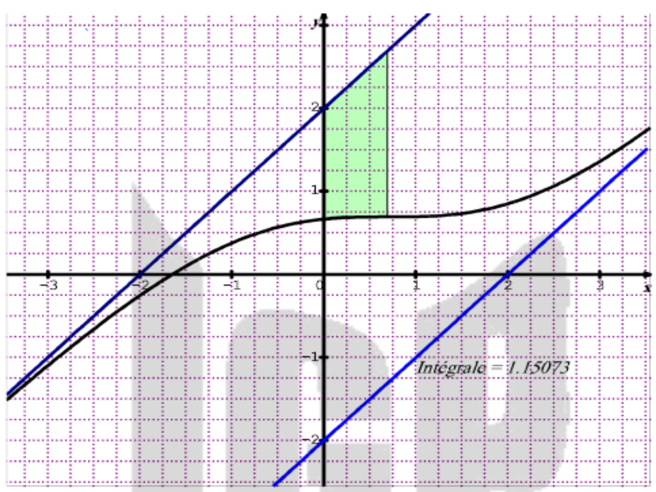
ب) 1. لدينا : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2} = x + 2 - 4 + \frac{8}{e^x + 2} = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$.

2. حساب: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}\right) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}\right) = +\infty$

3. اتجاه تغير الدالة f و جدول تغيراتها: الدالة f تقبل الاشتقاق على R .

$f'(x) = 1 - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{2x} - 4e^x + 4}{(e^x + 2)^2} = \frac{(e^x - 2)^2}{(e^x + 2)^2}$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على R .

4. الرسم



$$S = \int_0^{\ln 2} \left[(x + 2) - f(x)\right] dx = \int_0^{\ln 2} \frac{4e^x}{e^x + 2} dx = \left[4\ln(e^x + 2)\right]_0^{\ln 2} = 4[\ln 4 - \ln 3]ua = 16[\ln 4 - \ln 3]cm^2$$