Exercice 01: (**10** pts)

① Soient $f(x) = \frac{2x}{ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ et $g(x) = (x^2 + x - 1).e^x$, deux fonctions réelles.

1.1) Déterminer le DL au $v(1)$ à l'ordre 2 de la fonction $g(x)$.

1.2) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$, en utilisant les DL.

② Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ **(**par un changement de variables) et $I_2 = \int x\, arctg(x)dx$ (par parties) .

Exercice 02: (**10** pts**)**

① Calculer le déterminant de la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis déterminer sa matrice inverse P^{-1}.

②Vérifier que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

③ On pose $A = PMP^{-1}$ et $B = PM^{-1}P^{-1}$. (M^{-1} étant la matrice inverse de M) .

En utilisant les propriétés des déterminants et du produit matriciel, déduire :

Les déterminants $\det(A)$ et $\det(B)$ et Le produit matriciel $A \times B$ puis conclure.

④ Déterminer la matrice A.

⑤ Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{vmatrix} cosx & -sinx \\ sinx & cosx \end{vmatrix}$ est constant.

DL de quelques fonctions usuelles au voisinage de $x_0 = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

BONNE CHANCE

2014 - 2015

Corrigé du Rattrapage de MATHS 2 (SM)

Exercice 01: (**10** pts)

① *1.1)* Calcul du DL au $v(1)$ à l'ordre 2 de la fonction $g(x) = (x^2 + x - 1).e^x$.

Comme $x \in v(1)$ alors $x - 1 \in v(o)$, on pose donc $t = x - 1$ d'où $x = t + 1$ et ....(0.25pt)

$g(x) = g(t+1) = ((t+1)^2 + (t+1) - 1).e^{t+1} = e.(t^2 + 3t + 1).e^t$ ....(01 pt)

$$= e.(1 + 3t + t^2)\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = e + 4et + 3et^2 + o(t^2)$$ ....(01 pt)

Comme $t = x - 1$, On revient à la variable x et au voisinage de 1, ainsi, on obtient le DL_2 suivant :

$g(x) = e + 4e(x-1) + 3e(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$ ....(0.25pt)

1.2) Calcul de $lim_{x\to 0}\, f(x)$ en utilisant les DL . On a : $lim_{x\to 0} \frac{2x}{ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \frac{0}{0}\ (F.I)$ . ....(0.25pt)

Comme $\frac{1+x}{1-x} = (1+x)\ .\frac{1}{1-x}$ et $x \in v(0)$ alors :

$\frac{1+x}{1-x} = (1+x)(1+x+o(x)) = 1 + x + x + o(x) = 1 + 2x + o(x)$, d'où : ....(0.75pt)

$ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = ln\left(1 + \underbrace{(2x + o(x))}_{y}\right) = ln\,(1+y) = y + o(y) = 2x + o(x)$, ainsi : ....(0.75 pt)

$lim_{x\to 0} \frac{2x}{ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(2)}{\cancel{x}(2+o(1))} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{2+o(1)} = 1$ ....(0.75pt)

Puisque : $\lim_{x\to 0} o(1) = 0$.

② Calcul des intégrales :

- Calcul de $I_1 = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ .On pose $\sqrt{x} = t$ alors $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ et $dx = 2t\ dt$ ....(01pt)

D'où $I_1 = \int \frac{2t}{t^2+t} dt = \int \frac{2}{t+1} dt = 2\ln(t+1) + c$ ...(1pts)

$$= 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + c \quad , c \in \mathbb{R}$$ ...(0.5pts)

- Calcul de $I_2 = \int x\, arctg(x) dx$ (par parties).

On pose $\begin{cases} U = arctgx \\ \quad et \\ dV = x\, dx \end{cases}$ *alors* $\begin{cases} dU = \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ \quad et \\ V = \frac{x^2}{2} \end{cases}$ ....(0.5pt)

Avec la formue d'intégration par parties : $\int U\, dV = UV - \int V\, dU$, on obtient : ...(0.25pt)

$$I_2 = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{x^2}{x^2+1} dx}_{J}$$ ....(0.5pt)

$$J = \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= x - arctgx + c', \; c' \in \mathbb{R}$$ ...(1pts)

$$I_2 = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}(x - arctgx) + c'' = \frac{(x^2+1)arctgx - x}{2} + c'' \;, c'' \in \mathbb{R}$$ .....(0.25pt)

Exercice 02: **(** pts**)**

① Calculons $detP$ suivant la $1^{ière}$ colonne : $detP = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$ .....(0.5pt)

$detP \neq 0 \Rightarrow P$ est inversible. ......(0.25pt)

On calcule P^{-1} par la méthode des cofacteurs :

$$P^{-1} = \frac{1}{detP}\left(com(P)\right)^t = \left(com(P)\right)^t.$$ ......(0.5pt)

$$com(P) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ .... (01pt)+ (0.5pt)

$$\left(com(P)\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}.$$ .... (0.25pt)

② La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonale, son déterminant est donc égal au produit de ses éléments diagonaux. $detM = (2)(-1)(3) = -6 \neq 0$ alors M est inversible. ....(01 pt)

③ $det(A) = det(PMP^{-1}) = det(P)det(M)det(P^{-1})$

$$= det(P)det(M)\frac{1}{det\,(P)} = det(M) = -6.$$ ....(0.75 pt)

$det(B) = det(PM^{-1}P^{-1}) = det(P)det(M^{-1})det(P^{-1})$

$$= det(P)\frac{1}{det\,(M)}.\frac{1}{det\,(P)} = \frac{1}{det\,(M)} = -\frac{1}{6}.$$ ....(0.75 pt)

$A \times B = (PMP^{-1})(PM^{-1}P^{-1}) = PM(P^{-1}P)M^{-1}P^{-1} = P(MM^{-1})P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ ....(01 pt)

Avec $P^{-1}P = MM^{-1} = PP^{-1} = I_3$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3 qui est l'élément neutre par apport au produit des matrices d'ordre 3.

Comme $A \times B = I_3$, il suffit de vérifier que $B \times A = I_3$ pour conclure que B est la matrice inverse de A et réciproquement. ....(0.5 pt)

En effet $B \times A = (PM^{-1}P^{-1})(PMP^{-1}) = PM^{-1}(P^{-1}P)MP^{-1} = P(M^{-1}M)P^{-1} = PP^{-1} = I_3.$

④ $$A = (PM)P^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ....(01 pt)

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ -8 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ ....(01 pt)

Comme le produit matriciel est associatif on peut avoir aussi :

$$A = P(MP^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ -8 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

⑤ On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\begin{vmatrix} cosx & -sinx \\ sinx & cosx \end{vmatrix} = cosx.cosx - sinx.(-sinx) = (cosx)^2 + (sinx)^2 = 1, donc\ constant$…(01 pt)

<u>Barème</u> : *Exercice 01:* ① 1.1)⟶ (02.5 pts)

1.2) ⟶(02.5 pts)

② I_1 ⟶(02.5 pts) , I_2 ⟶ (02.5 pts)

Exercice 02: ① $detP$ ⟶(0.5 pt) , P^{-1} ⟶(02.5 pts)

② M Inversible ⟶ (01 pt)

③ $detA$ ⟶(0.75pt), $detB$ ⟶(0.75pt) , $A \times B$ ⟶(01pt),

conclusion⟶(0.5pt)

④ A ⟶(02 pts)

⑤⟶(01 pt)