Intégration d'une fonction trigonométrique

Exercices corrigés

Sont abordés dans cette fiche : *(cliquez sur l'exercice pour un accès direct)*

- **Exercice 1 :** calculer l'intégrale de la fonction sinus ou de la fonction cosinus
- **Exercice 2 :** calculer une intégrale dont l'intégrande est le produit des fonctions sinus et cosinus
- **Exercice 3 :** calculer une intégrale dont l'intégrande est une puissance de fonction trigonométrique
- **Exercice 4 :** calculer l'intégrale d'une fonction impaire ou d'une fonction paire
- **Exercice 5 :** calculer l'intégrale de la fonction tangente
- **Exercice 6 :** donner un encadrement d'une intégrale
- **Exercice 7 :** calculer une intégrale dont l'intégrande est une fonction composée avec l'exponentielle
- **Exercice 8 :** calculer une intégrale après avoir explicité une primitive de la fonction à intégrer
- **Exercice 9 :** préciser la valeur d'intégrales en résolvant un système d'équations
- **Exercice 10 :** calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle
- **Exercice 11 :** effectuer un calcul intégral pour déterminer l'aire d'un domaine du plan

Rappel : Notion d'intégrande

Dans une intégrale, la fonction qui est intégrée est appelée intégrande.

Avant de porter notre attention à la correction des exercices, rappelons **quelques points importants du cours** :

- ✓ Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
- ✓ Avant de calculer l'intégrale d'une fonction, il importe de déterminer l'ensemble de définition I de cette fonction, de vérifier que cette fonction est continue sur I et que la borne inférieure et la borne supérieure de l'intégrale appartiennent à I. *Dans ces exercices, toutes les intégrales proposées existent.*

Exercice corrigé 1 *(3 questions)* — *Niveau : facile*

1) Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

2) Calculer l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

3) En déduire l'intégrale suivante :

$$K = \int_0^{\pi} (2\cos x - 3\sin x) \, dx$$

Correction de l'exercice 1 — *↻ Retour au menu*

1) Calculons l'intégrale I.

Fonction f définie par $f(x) =$	Primitives F définies par $F(x) =$	Conditions sur x
$\cos x$	$\sin x + Constante$	

$$I = \int_0^{\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$$

2) Calculons l'intégrale J.

Fonction f définie par $f(x) =$	Primitives F définies par $F(x) =$	Conditions sur x
$\sin x$	$-\cos\ x + Constante$	

$$J = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

3) Déduisons des réponses précédentes la valeur de l'intégrale K.

Rappel : Linéarité de l'intégrale (linéarité additive et linéarité multiplicative)

Soient deux réels α et β. Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a \leq b$, alors :

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) \, dx = \int_a^b \alpha f(x) \, dx + \int_a^b \beta g(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$$

D’après la propriété de linéarité de l’intégrale, il vient que :

$$K = \int_0^{\pi} (2\cos x - 3\sin x)\, dx = 2\int_0^{\pi} \cos x\, dx - 3\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2I - 3J = -6$$

Exercice corrigé 2 *(2 questions)* *Niveau : moyen*

Calculer de deux manières différentes l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin x \, dx$$

Correction de l'exercice 2 *↻ Retour au menu*

✓ **1ère méthode : En repérant une formule trigonométrique de duplication**

Fonction f définie par $f(x) =$	**Primitives F définies par $F(x) =$**	**Conditions sur x, a et b**
$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{\cos(ax+b)}{a} + Constante$	$a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{\sin(ax+b)}{a} + Constante$	$a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ (formule de duplication).

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \boldsymbol{\cos x \sin x \, dx} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{4}[\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \cos 0\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

✓ **2e méthode : En repérant le produit de deux fonctions trigonométriques dont l'une est une primitive de l'autre**

Fonction f définie par $f(x) =$	**Primitives F définies par $F(x) =$**	**Conditions sur u et n**
$u'(x)u^n(x)$	$\dfrac{u^{n+1}(x)}{n+1} + Constante$	u dérivable ; $n \in \mathbb{N}^*$

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \sin x$. Alors, comme u est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = \cos x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\boldsymbol{\cos x}}_{\boldsymbol{u'(x)}} \underbrace{\boldsymbol{\sin x}}_{\boldsymbol{u^1(x)}} \boldsymbol{dx} = \left[\frac{\overbrace{\sin^2 x}^{u^2(x)}}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}[\sin^2 x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin^2 0\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 0^2\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

✓ **2^e méthode (bis) : En repérant le produit de deux fonctions trigonométriques dont l'une est une primitive de l'autre**

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \cos x$. Alors, comme u est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -\sin x$.

$$\int_{\mathbf{0}}^{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}} \mathbf{\cos \boldsymbol{x} \sin \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx}} = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{-\sin x}_{u'(x)} \underbrace{\cos x}_{u^1(x)}\, dx = -\left[\frac{\overbrace{\cos^2 x}^{u^2(x)}}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2}[\cos^2 x]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2}\left(\cos^2 \frac{\pi}{3} - \cos^2 0\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1^2\right) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \mathbf{\frac{3}{8}}$$

Exercice corrigé 3 *(1 question)* ***Niveau : moyen***

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \, dx$$

Correction de l'exercice 3 *↻ Retour au menu*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$$\boldsymbol{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \, dx} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cos x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\cos x}_{u'(x)} \underbrace{\sin^2 x}_{u^2(x)} \, dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{\overbrace{\sin^3 x}^{u^3(x)}}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3} [\sin^3 x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\sin^3 \frac{\pi}{4} - \sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) - \frac{1}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - (-1)^3\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{12} + \frac{2}{3}}$$

Exercice corrigé 4 *(2 questions)* *Niveau : facile*

1) Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-3}^{3} x^5 \cos x \, dx$$

2) Calculer l'intégrale suivante :

$$J = \int_{-1}^{1} |\sin x| \, dx$$

Correction de l'exercice 4 *↻ Retour au menu*

1) Calculons l'intégrale I.

Rappel : Intégrale d'une fonction impaire

Si f est une fonction continue et impaire sur un intervalle $[-a\,;a]$ avec $a \geq 0$, alors :

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

La fonction $f : x \mapsto x^5 \cos x$ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ par produit d'une fonction polynôme par la fonction cosinus, toutes deux continues sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^5 \cos(-x) = -x^5 \cos x = -f(x)$. Donc f est une fonction impaire.

Enfin, comme les bornes -3 et 3 sont opposées, il vient que :

$$\boldsymbol{I = \int_{-3}^{3} x^5 \cos x \, dx = 0}$$

2) Calculons l'intégrale J.

Rappel : Intégrale d'une fonction paire

Si f une fonction continue et paire sur un intervalle $[-a\,;a]$ avec $a \geq 0$, alors :

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$$

La fonction $f : x \mapsto |\sin x|$ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ par composition de la fonction sinus par la fonction valeur absolue, toutes deux continues sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$. Donc f est une fonction paire.

Enfin, comme les bornes -1 et 1 sont opposées, il vient que :

$$J = \int_{-1}^{1} |\sin x|\, dx = 2\int_{0}^{1} |\sin x|\, dx$$

Or, pour tout $x \in [0\,;1]$, $\sin x > 0$. Il en résulte que $|\sin x| = \sin x$ et finalement que :

$$\boldsymbol{J} = 2\int_{0}^{1} \sin x\, dx = 2[-\cos x]_0^1 = -2[\cos x]_0^1 = -2(\cos 1 - \cos 0) = -2(\cos 1 - 1) = \mathbf{2 - 2\cos 1}$$

Exercice corrigé 5 ***(1 question)*** ***Niveau : moyen***

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx$$

Correction de l'exercice 5 *↻ Retour au menu*

Fonction f définie par $f(x) =$	**Primitives F définies par $F(x) =$**	**Conditions sur u**
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x)) + Constante$	u dérivable et $u > 0$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Soit la fonction u définie sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right]$ par $u(x) = \cos x$. Alors, comme u est une fonction dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right]$, pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right]$, $u'(x) = -\sin x$. Notons également que, pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right]$, $\cos x > 0$, si bien que l'intégrale existe. Il vient finalement que :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \boldsymbol{\tan x \, dx} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\overbrace{-\sin x}^{u'(x)}}{\underbrace{\cos x}_{u(x)}} dx = -[\ln(\cos x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) - \ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= -\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \underbrace{=}_{\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}} -\ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln\frac{2^{1/2}}{2^1} = -\ln 2^{-1/2} \underbrace{=}_{n\ln a = \ln a^n} \ln 2^{1/2} = \mathbf{\ln\sqrt{2}}$$

Exercice corrigé 6 ***(1 question)*** ***Niveau : moyen***

Démontrer l'inégalité suivante :

$$\left|\int_0^1 x\sin x\,dx\right| \le \frac{1}{2}$$

Correction de l'exercice 6 *↻ Retour au menu*

Rappel : Conservation de l'ordre par intégration (ordre et intégrale / intégration d'une inégalité)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a \le b$. Alors, pour tout réel $x \in [a\,;b]$:

$$f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Remarques :

- ✓ On dit que l'intégrale conserve l'ordre.
- ✓ La réciproque n'est pas vraie.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \le \sin x \le 1$. Par conséquent, en multipliant par $x \in [0\,;1]$, c'est-à-dire en multipliant par $x \ge 0$, il vient que $-x \le x\sin x \le x$.

Comme l'intégrale conserve l'ordre d'une inégalité et comme $0 < 1$, il vient que :

$$-x \le x\sin x \le x \Rightarrow \int_0^1 (-x)\,dx \le \int_0^1 x\sin x\,dx \le \int_0^1 x\,dx \Rightarrow \left[-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \le \int_0^1 x\sin x\,dx \le \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow -\frac{1^2}{2} - \left(-\frac{0^2}{2}\right) \le \int_0^1 x\sin x\,dx \le \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \int_0^1 x\sin x\,dx \le \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\left|\int_0^1 x\sin x\,dx\right| \le \frac{1}{2}}$$

Remarque : On aurait pu affiner cet encadrement en remarquant que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $\sin x \ge 0$. D'où, en multipliant par $x \in [0\,;1]$, $0 \le x\sin x \le x$. Or, d'après la positivité de l'intégrale, pour tout $x \in [0\,;1]$, on a :

$$0 \le x\sin x \le x \Rightarrow 0 \le \int_0^1 x\sin x\,dx \le \int_0^1 x\,dx \Rightarrow 0 \le \int_0^1 x\sin x\,dx \le \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \Rightarrow 0 \le \int_0^1 x\sin x\,dx \le \frac{1}{2}$$

Rappel : Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a \le b$. Alors, pour tout réel $x \in [a\,;b]$:

$$f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \qquad\qquad f(x) \le 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le 0$$

Exercice corrigé 7 *(1 question)* — *Niveau : facile*

Calculer l'inégalité suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\, e^{3\sin x}\, dx$$

Correction de l'exercice 7 — *↻ Retour au menu*

Fonction f définie par $f(x) =$	Primitives F définies par $F(x) =$	Conditions sur u
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + Constante$	u dérivable

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3\sin x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 3\cos x$. Il en découle que $\cos x = \frac{u'(x)}{3}$. Par conséquent, il vient que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{2\cos x\, e^{3\sin x}\, dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\frac{u'(x)}{3} e^{u(x)}\, dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)e^{u(x)}\, dx = \frac{2}{3}\left[e^{u(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\left[e^{3\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(e^{3\sin\frac{\pi}{2}} - e^{3\sin 0}\right) = \frac{2}{3}\left(e^{3\times 1} - \underbrace{e^{3\times 0}}_{e^0=1}\right) = \mathbf{\frac{2e^3}{3} - \frac{2}{3}}$$

Exercice corrigé 8 *(2 questions)* *Niveau : facile*

1) Montrer que la fonction $x \mapsto x\cos x$ est une primitive, sur $\mathbb{R}$, de la fonction $x \mapsto \cos x - x\sin x$.
2) En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\pi} (\cos x - x\sin x)\, dx$$

Correction de l'exercice 8 *↻ Retour au menu*

1)

Rappel : Primitive d'une fonction et calcul d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a \leq b$. Une **primitive** de f sur $[a\,;b]$ est, si elle existe, une fonction F dérivable sur $[a\,;b]$ vérifiant $F' = f$ sur $[a\,;b]$.

Si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$ et si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$, alors, pour tout $x \in [a\,;b]$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Appelons f la fonction définie par $f(x) = x\cos x$. Cette fonction est le produit d'une fonction affine par la fonction cosinus. Or, ces fonctions sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Appelons par ailleurs g la fonction définie par $g(x) = \cos x - x\sin x$ et notons que cette fonction est également définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times \cos x + x \times (-\sin x) = \cos x - x\sin x = g(x)$.

Il résulte que **f est une primitive de g sur** $\mathbb{R}$.

2)

$$\int_0^{\pi} (\boldsymbol{\cos x - x\sin x})\, \boldsymbol{dx} = \int_0^{\pi} g(x)\, dx = [f(x)]_0^{\pi} = [x\cos x]_0^{\pi} = \pi\cos\pi - 0\cos 0 = \pi \times (-1) = \boldsymbol{-\pi}$$

Exercice corrigé 9 *(3 questions)* — *Niveau : difficile*

On définit les intégrales I et J par :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}dx \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}dx$$

1) Calculer $I+J$.
2) Calculer $I-J$.
3) En déduire I et J.

Correction de l'exercice 9

↻ Retour au menu

1) Tout d'abord, calculons la somme des intégrales I et J.

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}dx$$

Soit la fonction u définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ par $u(x)=\cos x-\sin x$. Or, u est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ comme étant la différence de la fonction cosinus et de la fonction sinus. Ainsi, pour tout $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$, $u'(x)=-\sin x-\cos x$. Il vient alors que :

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\overbrace{-(\cos x+\sin x)}^{u'(x)}}{\underbrace{\cos x-\sin x}_{u(x)}}dx$$

Or, la fonction cosinus est décroissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ donc, pour tout $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$, on a $\cos\frac{\pi}{6}\leq\cos x\leq\cos 0$, c'est-à-dire $\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\cos x\leq 1$. En outre, la fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ donc, pour tout $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$, on a $\sin 0\leq\sin x\leq\sin\frac{\pi}{6}$, c'est-à-dire $0\leq\sin x\leq\frac{1}{2}$. Enfin, en multipliant par -1, il vient $-\frac{1}{2}\leq-\sin x\leq 0$. Par conséquent, pour tout $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$, $\cos x-\sin x>0$, c'est-à-dire $u(x)>0$.

Il en résulte que :

$$\boldsymbol{I+J}=-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\overbrace{-(\cos x+\sin x)}^{u'(x)}}{\underbrace{\cos x-\sin x}_{u(x)}}dx=-[\ln u(x)]_0^{\frac{\pi}{6}}=-[\ln(\cos x-\sin x)]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=-\left(\ln\left(\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)-\ln(\cos 0-\sin 0)\right)=-\left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)-\ln 1\right)=\boldsymbol{-\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}$$

2) Calculons désormais la différence des intégrales I et J.

$$\boldsymbol{I-J}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x-\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}1\,dx=[x]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

3) Calculons enfin les intégrales I et J.

Pour déterminer la valeur des intégrales I et J, résolvons le système suivant : $\begin{cases} I+J=-\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \\ I-J=\frac{\pi}{6} \end{cases}$.

$$\begin{cases} I+J=-\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) & (L_1) \\ I-J=\dfrac{\pi}{6} & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2I=-\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+\dfrac{\pi}{6} & (L_1 \leftarrow L_1+L_2) \\ 2J=-\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)-\dfrac{\pi}{6} & (L_2 \leftarrow L_1-L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I=-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+\dfrac{\pi}{12} & (L_1) \\ J=-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)-\dfrac{\pi}{12} & (L_2) \end{cases}$$

En conclusion, on a les résultats suivants :

$$\boldsymbol{I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}dx=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+\frac{\pi}{12}} \qquad \boldsymbol{J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}dx=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)-\frac{\pi}{12}}$$

Exercice corrigé 10 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

Soit la fonction f définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\cos 3x\sin 5x$.

Calculer la valeur moyenne de cette fonction sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

Correction de l'exercice 10 — *↻ Retour au menu*

Rappel : Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a<b$. La valeur moyenne de la fonction f sur $[a\,;b]$ est le réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

La valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x)=\cos 3x\sin 5x$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ est le réel m tel que :

$$m=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\sin 5x\,dx$$

Or, pour tous réels a et b, $\sin a\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$. Il vient alors que :

$$\boldsymbol{m}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\underbrace{5x}_{a}\cos\underbrace{3x}_{b}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(\sin\left(\underbrace{5x}_{a}+\underbrace{3x}_{b}\right)+\sin\left(\underbrace{5x}_{a}-\underbrace{3x}_{b}\right)\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 8x+\sin 2x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos 8x}{8}-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos 8x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos 4\pi}{8}+\frac{\cos\pi}{2}-\frac{\cos 0}{8}-\frac{\cos 0}{2}\right)=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{\pi}}$$

Exercice corrigé 11 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,\pi]$ par $f(x) = -1 + \frac{1}{2}\sin^2 x$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan.

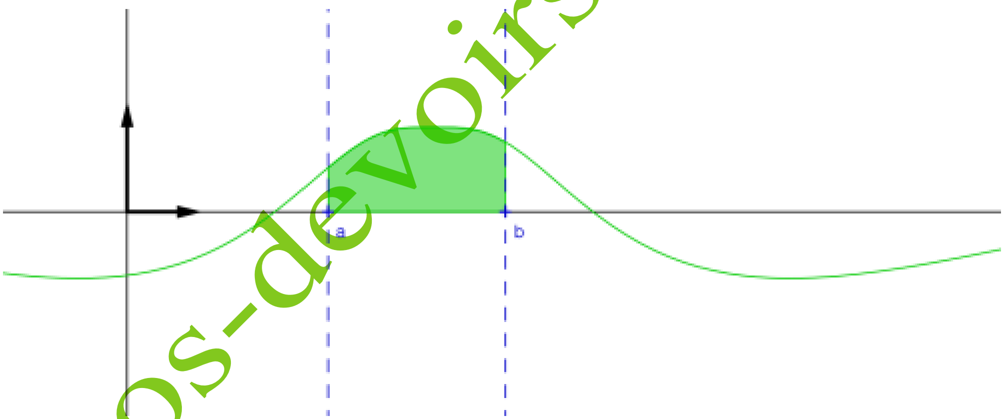
Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine du plan délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \pi$.

Correction de l'exercice 11 — ↻ *Retour au menu*

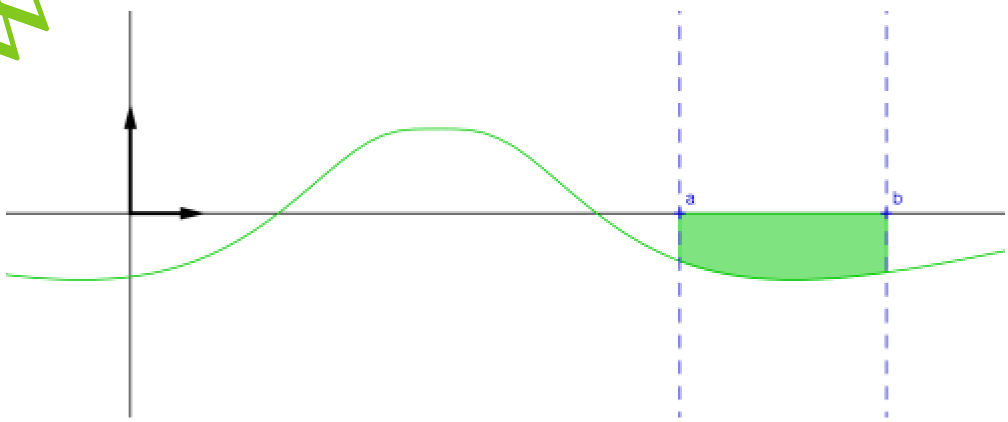
Rappel : Calcul intégral et aire d'un domaine du plan

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a < b$, représentée par sa courbe C_f dans un repère orthogonal (ou orthonormé) du plan. Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

- ✓ Si f est positive sur $[a\,;b]$, alors : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$



- ✓ Si f est négative sur $[a\,;b]$, alors : $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\,dx$



Dans les exemples ci-dessus, C_f est la courbe représentée en vert et $\mathcal{A}$ est l'aire colorée en vert.

Pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, d'où $0 \leq \frac{1}{2}\sin^2 x \leq \frac{1}{2}$. Finalement, il vient $-1 \leq \frac{1}{2}\sin^2 x - 1 \leq \frac{1}{2} - 1$, c'est-à-dire $-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{2}$. La fonction f est donc négative sur $[0\,;\,\pi]$. De plus, comme $0 < \pi$ et comme la fonction f est continue sur $[0\,;\,\pi]$, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \pi$ est donnée par :

$$\mathcal{A} = -\int_0^{\pi} f(x)\,dx = -\int_0^{\pi} \left(-1 + \frac{1}{2}\sin^2 x\right) dx$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ (formule de duplication). Il s'ensuit que $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ et que :

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = -\int_0^{\pi} \left(-1 + \frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx = -\int_0^{\pi} \left(-1 + \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{4}\right) dx = -\int_0^{\pi} \left(-\frac{3}{4} - \frac{\cos 2x}{4}\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 2x}{4}\right) dx = \left[\frac{3}{4}x + \frac{\sin 2x}{8}\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\sin 2\pi}{8} - 0 - \frac{\sin 0}{8} = \boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}\ \boldsymbol{u.a.}$$