Chapitre 6

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

6.1 Définitions

On définit trois fonctions sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}
\text{ch } x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (cosinus hyperbolique),} \\
\text{sh } x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ (sinus hyperbolique) et} \\
\text{th } x &= \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \text{ (tangente hyperbolique).}
\end{aligned}$$

Remarques :

- On utilise parfois $\text{coth } x = \dfrac{1}{\text{th } x}$.
- Le terme hyperbolique se justifie géométriquement. En effet, en posant : $\begin{cases} x = a \,\text{ch}\, t \\ y = b \,\text{sh}\, t \end{cases}$ quand t décrit $\mathbb{R}$, M de coordonnées (x, y) décrit une branche d'hyperbole.

6.2 Trigonométrie hyperbolique

Dans toute la suite, a et b désigneront deux réels.

6.2.1 Premières formules

$$\begin{aligned}
\text{ch } a + \text{sh } a &= e^a \quad \text{et} \quad \text{ch } a - \text{sh } a = e^{-a} \\
\text{ch}^2 a - \text{sh}^2 a &= 1 \text{ et par suite,} \quad \text{ch } a \geq 1 \\
1 - \text{th}^2 a &= \frac{1}{\text{ch}^2 a} \text{ et par suite,} \quad -1 < \text{th } a < 1
\end{aligned}$$

6.2.2 Formules d'addition

$e^{a+b} = e^a e^b = (\text{ch } a + \text{sh } a)(\text{ch } b + \text{sh } b) = \text{ch } a \,\text{ch } b + \text{ch } a \,\text{sh } b + \text{sh } a \,\text{ch } b + \text{sh } a \,\text{sh } b$

$e^{-(a+b)} = e^{-a}e^{-b} = (\text{ch } a - \text{sh } a)(\text{ch } b - \text{sh } b) = \text{ch } a \,\text{ch } b - \text{ch } a \,\text{sh } b - \text{sh } a \,\text{ch } b + \text{sh } a \,\text{sh } b$

Or $\text{ch } (a+b) = \dfrac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2}$ et $\text{sh } (a+b) = \dfrac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2}$ d'où :

$\text{ch } (a+b) = \text{ch } a \,\text{ch } b + \text{sh } a \,\text{sh } b$ $\qquad$ $\text{sh } (a+b) = \text{sh } a \,\text{ch } b + \text{ch } a \,\text{sh } b$

$\text{ch } (a-b) = \text{ch } a \,\text{ch } b - \text{sh } a \,\text{sh } b$ $\qquad$ $\text{sh } (a-b) = \text{sh } a \,\text{ch } b - \text{ch } a \,\text{sh } b$

$\text{ch } 2a = \text{ch}^2 a + \text{sh}^2 a = 1 + 2\text{sh}^2 a = 2\text{ch}^2 a - 1$ $\qquad$ $\text{sh } 2a = 2\text{sh } a \,\text{ch } a$

On obtient ensuite en quotientant :

$\text{th } (a+b) = \dfrac{\text{th } a + \text{th } b}{1 + \text{th } a \,\text{th } b}$ $\qquad$ $\text{th } (a-b) = \dfrac{\text{th } a - \text{th } b}{1 - \text{th } a \,\text{th } b}$ $\qquad$ $\text{th } (2a) = \dfrac{2\text{th } a}{1 + \text{th}^2 a}$.

6.2.3 Transformation de produits en sommes

Ces formules résultent des précédentes :

$\text{ch } a \,\text{ch } b = \dfrac{1}{2}[\text{ch } (a+b) + \text{ch } (a-b)]$ $\qquad$ $\text{sh } a \,\text{sh } b = \dfrac{1}{2}[\text{ch } (a+b) - \text{ch } (a-b)]$

$\text{sh } a \,\text{ch } b = \dfrac{1}{2}[\text{sh } (a+b) + \text{sh } (a-b)]$ $\qquad$ $\text{ch}^2 a = \dfrac{\text{ch } 2a + 1}{2}$ et $\text{sh}^2 a = \dfrac{\text{ch } 2a - 1}{2}$

6.2.4 Transformation de sommes en produits

En posant $p = a + b$ et $q = a - b$, il vient alors :

$\text{ch } p + \text{ch } q = 2\text{ch } \dfrac{p+q}{2} \text{ch } \dfrac{p-q}{2}$ $\qquad$ $\text{ch } p - \text{ch } q = 2\text{sh } \dfrac{p+q}{2} \text{sh } \dfrac{p-q}{2}$

$\text{sh } p + \text{sh } q = 2\text{sh } \dfrac{p+q}{2} \text{ch } \dfrac{p-q}{2}$ $\qquad$ $\text{sh } p - \text{sh } q = 2\text{sh } \dfrac{p-q}{2} \text{ch } \dfrac{p+q}{2}$

6.2.5 Changement de variable

En posant $t = \text{th } \frac{x}{2}$ on obtient immédiatement : $\text{th } x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

De plus, $\text{ch } x = \text{ch}^2 \frac{x}{2} + \text{sh}^2 \frac{x}{2} = \dfrac{\text{ch}^2 \frac{x}{2} + \text{sh}^2 \frac{x}{2}}{\text{ch}^2 \frac{x}{2} - \text{sh}^2 \frac{x}{2}}$. Donc $\text{ch } x = \dfrac{1 + \text{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \text{th}^2 \frac{x}{2}}$ soit : $\text{ch } x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$

De ces deux résultats, on déduit : $\text{sh } x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

6.2.6 Exemples

a) Linéariser $\text{ch}^5 x$.

On a : $\text{ch}^5 x = (\dfrac{e^x + e^{-x}}{2})^5$. On développe, on regroupe les termes "similaires" et on obtient :

$\text{ch}^5 x = \dfrac{1}{2^4}(\text{ch } 5x + 5\text{ch } 3x + 10\text{ch } x)$.

b) Exprimer sh $3x$ à l'aide des puissances de sh x.

On écrit que par définition sh $3x = \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}$ puis que $e^{3x} = (\text{ch } x + \text{sh } x)^3$ et que $e^{-3x} = (\text{ch } x - \text{sh } x)^3$. En développant ces deux expressions et en simplifiant, on obtient : sh $3x = \text{sh}^3 x + 3\text{ch}^2 x \,\text{sh } x = 4\text{sh}^3 x + 3\text{sh } x$.

Remarque : Passage de circulaire à hyperbolique

On a pu observer une certaine correspondance entre les formules de la trigonométrie hyperbolique et celles de la trigonométrie circulaire. En fait, on passe aisément des secondes aux premières par les transformations :

$\cos x \longrightarrow \text{ch } x$ $\qquad$ $\sin x \longrightarrow i\text{sh } x$ $\qquad$ $\tan x \longrightarrow i\text{th } x$.

6.3 Etude des fonctions hyperboliques

6.3.1 Etude de la fonction ch

ch est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

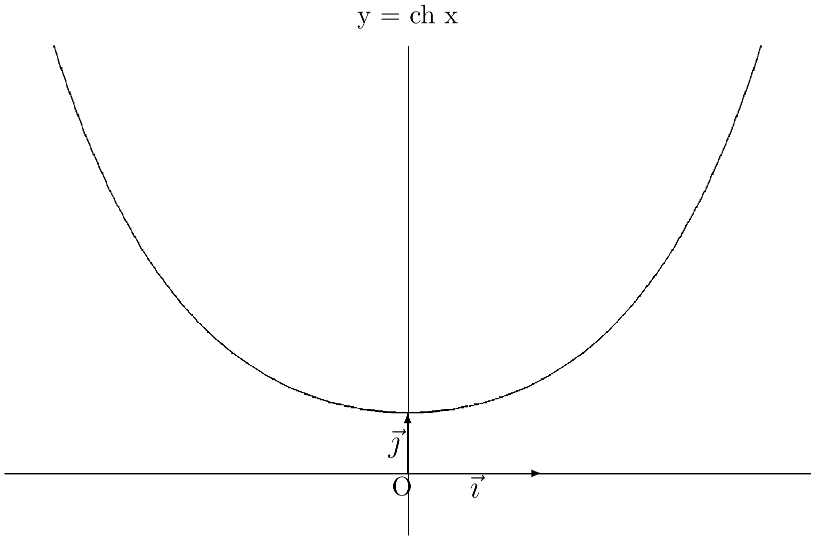
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a ch $(-x) = $ ch x : la fonction ch est paire ; on va donc l'étudier sur $I = [0, +\infty[$.

$$\forall x \in I, \ \text{ch}\,'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh } x$$

De plus, comme $\forall x \in I$, $e^x \geq e^{-x}$ (la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$), la fonction sh est positive sur I et par suite ch est croissante sur I.

Cela permet en particulier d'affirmer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, ch $x \geq$ ch $0 = 1$.

Il est d'autre part clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{ch } x = +\infty$. On observe alors que $\dfrac{\text{ch } x}{x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. La courbe représentative de la fonction ch admet donc une branche parabolique de direction asymptotique (Oy).



Remarque : Cette courbe est appelée *chaînette*. Elle correspond en effet à la position d'équilibre d'un fil inextensible suspendu par deux de ses points.

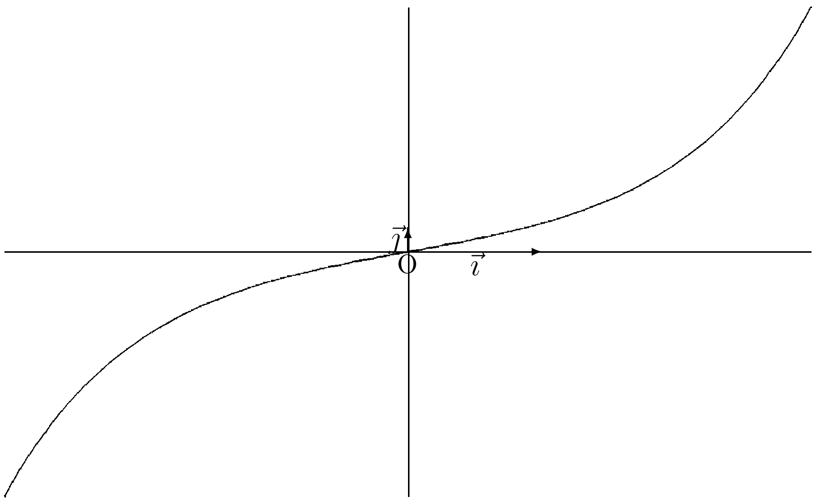
6.3.2 Etude de la fonction sh

sh est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a sh $(-x) = -$sh x : la fonction sh est impaire ; on va donc l'étudier sur $I = [0, +\infty[$.

$$\forall x \in I,\ \text{sh}\,'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}\ x$$

De plus, comme la fonction ch est positive sur I, sh est croissante sur I.
D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{sh}\ x = +\infty$. On observe alors que $\dfrac{\text{sh}\ x}{x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. La courbe représentative de la fonction sh admet donc une branche parabolique de direction asymptotique (y'y).

y = sh x



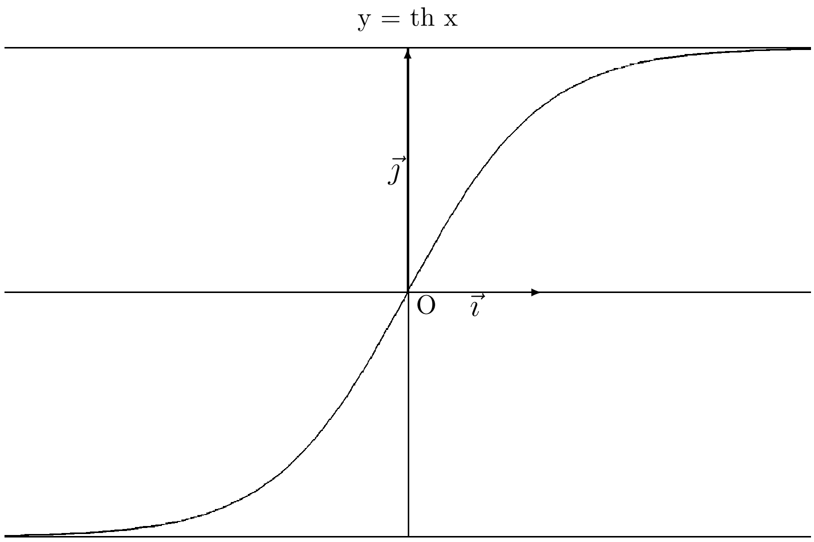
On peut de plus remarquer que puisque ch $x -$ sh $x = e^{-x}$, les deux courbes ci-dessus sont asymptotes en $+\infty$, la courbe représentative de ch étant constamment au dessus de celle de sh.

6.3.3 Etude de la fonction th

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, ch $x \geq 1$, th est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a th $(-x) = -$th x : la fonction th est impaire ; on va donc l'étudier sur $I = [0, +\infty[$.

$$\forall x \in I,\ \text{th}\,'(x) = \frac{\text{ch}\,^2 x - \text{sh}\,^2 x}{\text{ch}\,^2 x} = 1 - \text{th}\,^2\, x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$$

La fonction th est donc croissante sur I.
D'autre part, th $x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty}$ th $x = 1$. La courbe représentative de la fonction th admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.



6.3.4 Limites classiques

- On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sh } x - \text{sh } 0}{x-0} = \text{ch } 0 = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sh } x}{x} = 1$.

- On en déduit immédiatement $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{th } x}{x} = 1$.

- De même, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ch } x - \text{ch } 0}{x-0} = \text{sh } 0 = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ch } x - 1}{x} = 0$.

- D'autre part $\text{ch } x - 1 = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2$ c'est à dire $\text{ch } x - 1 = 2\text{sh}^2\dfrac{x}{2}$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ch } x - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (on peut également effectuer ce calcul à l'aide de la règle de l'Hospital).

6.4 Fonctions hyperboliques réciproques

6.4.1 Argument cosinus hyperbolique

La fonction ch définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[1, +\infty[$ est continue et strictement croissante; elle admet donc une fonction réciproque, appelée *Argument cosinus hyperbolique* et notée Argch. On a donc

$$x = \text{Argch } y \Longleftrightarrow (y = \text{ch } x \text{ et } x \in [0, +\infty[\ )$$

Comme $e^x = \text{ch } x + \text{sh } x = \text{ch } x + \sqrt{\text{ch}^2 x - 1}$, on obtient $x = \text{Argch } y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ et, d'après le théorème sur la dérivée des fonctions réciproques,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\text{sh } x} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

On a donc

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad (\text{Argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

6.4.2 Argument sinus hyperbolique

La fonction sh définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue et strictement croissante; elle admet donc une fonction réciproque, appelée *Argument sinus hyperbolique* et notée Argsh. On a donc

$$x = \text{Argsh } y \Longleftrightarrow (y = \text{sh } x \text{ et } x \in \mathbb{R}\ )$$

Comme $e^x = \text{sh } x + \text{ch } x = \text{sh } x + \sqrt{\text{sh}^2 x + 1}$, on obtient $x = \text{Argsh } y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ et, d'après le théorème sur la dérivée des fonctions réciproques,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\text{ch } x} = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{Argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

6.4.3 Argument tangente hyperbolique

La fonction th définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$ est continue et strictement croissante; elle admet donc une fonction réciproque, appelée *Argument tangente hyperbolique* et notée Argth. On a donc

$$x = \text{Argth } y \Longleftrightarrow (y = \text{th } x \text{ et } x \in \mathbb{R}\ )$$

Comme $y = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, on a $e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$ et on obtient $x = \text{Argth } y = \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1+y}{1-y})$ et, d'après le théorème sur la dérivée des fonctions réciproques,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1-\text{th}^2 x} = \frac{1}{1-y^2}.$$

On a donc

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (\text{Argth})'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

REMARQUE : les expressions des fonctions hyperboliques réciproques ne sont pas à connaitre, mais il faut savoir les retrouver. On retrouvera ces fonctions au chapitre des primitives.