IV. FONCTIONS CIRCULAIRES

1) DEF :
$\cos x = \overline{OA}$
$\sin x = \overline{OB}$
$\tan x = \overline{IN}$, si N existe, i.e. $x \neq \pi/2 \mod \pi$
$\cot x = \overline{JP}$, si P existe, i.e. $x \neq 0 \mod \pi$

PROP :

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, si $x \neq \pi/2 \mod \pi$
$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, si $x \neq 0 \mod \pi$

D1

2) FORMULES CLASSIQUES

$$(1)\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$(1')\ 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ (diviser (1) par } \cos^2 x)$$
$$(1'')\ 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \text{ (diviser (1) par } \sin^2 x)$$

A savoir par coeur ou à l'aide d'un dessin : jamais à partir des formules $\cos(a+b)$ etc. :

symétrie/ Ox	symétrie / O	symétrie / Oy	symétrie / $y = x$	rotation angle $\pi/2$
$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$

On en déduit : $\cos(x + n\pi) =$ ...., $\sin(x + n\pi) =$ ....
Fonctions circulaires d'une somme :

(2) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	(3) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	(4) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
(2') $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	(3') $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	(4') $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

D2

Formules de l'angle double, et de l'angle moitié, à savoir toutes par coeur, et retrouver :

(5) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ (vient de (2))
(5') $\cos 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ (mettre $\cos^2 x$ en facteur dans (5) et utiliser (1'))
$(5'')$ $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ avec $t = \tan \dfrac{x}{2}$

(6) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ (vient de (5) et (1))
(6') $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
(6") $1 + \cos x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$

(7) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ (vient de (5) et (1))
(7') $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
(7") $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$

(8) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ (vient de (3))
(8′) $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$
(8″) $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ (mettre $\cos^2 x$ en facteur dans (8) et utiliser (1′))
(8‴) $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ avec $t = \tan\frac{x}{2}$

(9) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ (vient de (4))
(9') $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$ avec $t = \tan\frac{x}{2}$ (vient de (9) ou du quotient de (8‴) et (5″))

(10) $\tan\frac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ (vient du quotient de (7") et (8′))

D3

Formules de l'angle triple :

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$	$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$
$\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$	$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

D4

Formules de linéarisation (produits en sommes) :

(11) $\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ (faire (2) + (2′))
(12) $\sin a\sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$ (faire (2′) − (2))
(13) $\sin a\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ (faire (3) + (3'))

Applications : E1 ; avec Maple, les linéarisations se font avec la fonction "combine".

Transformations de somme en produit :

(14) $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ (prendre (11) avec $p = a+b$ et $q = a-b$)
(15) $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ (prendre (12) avec $p = a+b$ et $q = a-b$)
(16) $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ (prendre (13) avec $p = a+b$ et $q = a-b$)
(16') $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ (changer q en $-q$ dans (16))

On en déduit $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

D5

Plus généralement :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$$

φ étant défini modulo 2π par :

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

D6

Rem 1 : c'est cette formule qui permet de mettre les solutions de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$: $A\cos\omega x + B\sin\omega x$ sous la forme $C\cos(\omega x - \varphi)$.
Rem 2 : l'angle φ est l'un des angles du triangle rectangle de côtés a et b.

3) Équations trigonométriques :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}\cos x = \cos y\\ \sin x = \sin y\end{array}\right. \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ y = x + 2k\pi}$$

$$\boxed{\cos x = \cos y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ y = \pm x + 2k\pi}$$

$$\boxed{\sin x = \sin y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ y = x + 2k\pi \text{ ou } \pi - x + 2k\pi}$$

$$\boxed{\tan x = \tan y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ y = x + k\pi}$$

D7

4) Valeurs remarquables

x	$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{..} - \frac{\pi}{..}$	$\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\cos x$	$\frac{\sqrt{\;\;} + \sqrt{\;\;}}{\;}$	$\frac{\sqrt{\;\;}\sqrt{\;\;+\sqrt{\;\;}}}{\;}$								
$\sin x$	$\frac{\sqrt{\;\;} - \sqrt{\;\;}}{\;}$	$\frac{\sqrt{\;\;} -}{\;}$			$\frac{\sqrt{\;\;}\sqrt{\;\;-\sqrt{\;\;}}}{\;}$					
$\tan x$		$\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$			$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$					
$\cot x$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$1 + \sqrt{2}$		$\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$					

D8

5) Étude de la fonction cosinus.

a) Continuité.

DEF : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en un point $x_0 \in D_f$ si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple : E2

PROP : la fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$.

LEMME : si $-\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $|\sin u| \leqslant |u|$.
D9

b) Dérivabilité.

Rappel : f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ possède une limite finie quand $x \to x_0$, et cette limite est notée $f'(x_0)$.

PROP : la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$.

D10 :
Premier pas de la démonstration : cela revient à démontrer que $\frac{\sin u}{u}$ possède une limite finie quand $u \to 0$.

Deuxième pas ; on démontre le
LEMME : si $0 < |u| \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $\cos u \leqslant \frac{\sin u}{u} \leqslant 1$.

c) Réduction de l'ensemble d'étude.

Il suffit d'étudier cos sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

D11

d) Variations et tracé de la courbe.

D12

6) Étude de la fonction sinus.

a) Continuité et dérivabilité.

PROP : la fonction sin est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.

D13

b) Tracé de la courbe.

Rem : la courbe de sin se déduit de celle de cos par une translation de vecteur $\pi/2\,\overrightarrow{i}$.

Ceci provient de la relation :

D14

7) Étude de la fonction tangente.

a) Dérivabilité.

PROP : la fonction tan est dérivable (donc continue) sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$et $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

D15

b) Réduction de l'ensemble d'étude.

Il suffit d'étudier tan sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

D16

c) Variations et tracé de la courbe.

D17

Exercice : faire sur le même modèle l'étude de la fonction cot et trouver la transformation faisant passer d'une courbe à l'autre.

V) FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES.

1) Notions sur les fonctions réciproques.

DEF : f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ (mais pouvant être définie sur un ensemble plus grand que I) ; soit $J = f(I) = \{y \in \mathbb{R} \ / \ \exists x \in \mathbb{R} \ / \ y = f(x)\}$ l'image de I par f.

On dit que la restriction de f à I possède une fonction réciproque si pour tout y de J il existe un *unique* élément x de I tel que $y = f(x)$. Dans ce cas, on définit la fonction réciproque f^{-1} de f sur I comme la fonction qui à y de J fait correspondre cet élément x.

On a donc

$$y = f(x) \text{ avec } x \in I \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ avec } y \in J$$

ATTENTION : ne pas confondre f^{-1} et $1/f$!!!!!

REM 1 : $M(x,y)$ appartient à la courbe de f sur I ssi $N(y,x)$ appartient à la courbe de f^{-1} sur J : ces deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

REM 2 : si f est strictement monotone sur I, alors f possède sur I une fonction réciproque, mais la réciproque est fausse.

D18

* Continuité de f^{-1}

TH : si f est strictement monotone et continue sur un *intervalle* I, alors f^{-1}est strictement monotone de même sens que f et continue sur J.

D 19 (pour la monotonie seulement) .

* Dérivabilité de f^{-1}.

TH : si f est strictement monotone et dérivable sur un *intervalle* I, alors f^{-1} est dérivable en tout point $y = f(x)$ de J tel que $f'(x) \neq 0$ et alors

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

Si $f'(x) = 0$, alors la tangente à la courbe de f^{-1} en $N(y,x)$ est verticale.

D20 (très partielle).

Exemples : E3 : $f(x) = x^2, x^3, x^3 + x$.

2) Fonction réciproque de sin.

DEF : la fonction arcsin (ou $\sin^{-1}$) est la fonction réciproque de la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\left\{\begin{array}{c} x = \arcsin y \\ y \in [-1,1] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = \sin x \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$$

Justification de cette définition : D21

Exemples de calculs : E4

PROP : l'ensemble de définition de arcsin est $[-1,1]$, elle y est continue, mais elle n'est dérivable que sur $]-1,1[$.

D22

Tracé de la courbe.

Calcul de $\arcsin'$:

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

D23

CORO :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\qquad \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$$

D 24

PROP : la fonction arcsin est impaire :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \arcsin(-x) = -\arcsin x$$

D25

3) Fonction réciproque de cos.
DEF : la fonction arccos est la fonction réciproque de la restriction de cos à $[0, \pi]$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = \arccos y \\ y \in [-1, 1] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = \cos x \\ x \in [0, \pi] \end{array} \right.$$

Justification de cette définition : D26

Exemples de calculs : E5

PROP : l'ensemble de définition de arccos est $[-1, 1]$, elle y est continue, mais elle n'est dérivable que sur $]-1, 1[$.

D27

Tracé de la courbe ; pb du point d'intersection des courbes de cos et d'arccos.
Calcul de arccos$'$:

$$\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

D28

PROP : on a les relations :

$$\begin{array}{lcll} \forall x & \in & [-1, 1] & \arccos(-x) = \pi - \arccos x \\ \forall x & \in & [-1, 1] & \arccos x = \pi/2 - \arcsin x \end{array}$$

D29
Rem : la deuxième relation montre que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite : ......
Ceci fait qu'on utilise plutôt la fonction arcsin, qui est impaire.

4) Fonction réciproque de tan.
DEF : la fonction arctan est la fonction réciproque de la restriction de tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$x = \arctan y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = \tan x \\ x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[\end{array} \right.$$

Justification de cette définition : D30

Exemples de calculs : E6

PROP : l'ensemble de définition de arctan est $\mathbb{R}$, et elle y est dérivable (donc continue).

D31

Tracé de la courbe.
Calcul de arctan$'$:

$$\arctan' y = \frac{1}{1+y^2}$$

D32

CORO :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$$

D33

PROP : la fonction arctan est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan(-x) = -\arctan x$$

PROP :

$$\arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan x \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

$$\arctan a + \arctan b = \arctan\frac{a+b}{1-ab}\begin{cases} \text{tout court si } ab < 1 \\ +\pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a \text{ et } b > 0 \\ -\pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a \text{ et } b < 0 \end{cases}$$

D34

E5 : calculer $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}; \arctan 2 + \arctan 3.$

Exercice : définir de la même façon la fonction arccot, réciproque de cot sur $]0, \pi[$, et montrer la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{arccot} x = \pi/2 - \arctan x$$

VI) FONCTIONS LOGARITHME

1) Introduction.

On recherche des fonctions transformant des produits en sommes, i.e.

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Rem : si une telle fonction est définie en 0, alors elle est nulle partout, ce qui est peu intéressant.

D1

Par contre, on va démontrer le

TH : Si

$$\begin{cases} \forall x, y > 0 \ \ f(xy) = f(x) + f(y) \\ f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\end{cases}$$

alors $f(1) = 0$ et il existe une constante k telle que

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{k}{x}$$

D2

DEF : On désigne par ln (logarithme népérien) l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, qui s'annule en 1, autrement dit :

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

REM : la conclusion du TH ci-dessus peut donc s'énoncer :

$$\exists k \in \mathbb{R} \ / \ f = k \ln$$

D3

2) Propriétés de la fonction ln .

P1 $\forall x, y > 0 \quad \ln xy = \ln x + \ln y$
P2 $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \ \ln x^n = n \ln x$
P3 $\forall x > 0 \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x$
P4 $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x > 0 \ \ln x^n = n \ln x$
P5 $\forall r \in \mathbb{Q} \quad \forall x > 0 \ \ln x^r = r \ln x$
P6 la fonction ln est strictement croisssante sur $]0, +\infty[$
P7 $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty, \ \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
P8 $\forall x > 0 \quad \ln x \leqslant x - 1$ (à bien visualiser)
P9 $\forall x > 0 \quad \ln x \leqslant 2\left(\sqrt{x} - 1\right)$
P10 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (à savoir interpréter graphiquement)
P11 $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$
P12 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

D4

3) Étude de la fonction ln et définition de e.

PROP et DEF : il existe un unique réel $e > 1$ tel que $\ln e = 1$; la tangente à la courbe de ln au point de coordonnées $(e, 1)$ passe par O.

D5

On démontre que $e \simeq 2,71828182846$

4) Fonctions logarithme de base a.

Le théorème D3 du 1) est en fait une équivalence :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \forall x, y > 0 \ \ f(xy) = f(x) + f(y) \\ f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \ \ / \ \ f = k \ln}$$

D6

DEF : si $a > 0$ et $\neq 1$, la fonction logarithme de base a est l'unique fonction dérivable f sur $]0, +\infty[$ vérifiant

$$\forall x, y > 0 \ \ f(xy) = f(x) + f(y) \ \text{ et } f(a) = 1$$

Notations : $\log_a$ (maple : log[a]), $\log_{10} = \log$.

PROP :

$P1 \ \forall x > 0 \ \ \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
$P2 \ \forall a, b, c > 0, \ a, b \neq 1 \quad \log_a b . \log_b c = \log_a c$ (relation de Chasles)

D7

VII) FONCTIONS EXPONENTIELLE

1) Définitions et propriétés de la fonction exp.

DEF : la fonction exp est la fonction réciproque de ln :

$$\boxed{x = \exp y \Leftrightarrow y = \ln x}$$

Justification de cette définition : D8

Propriétés :

P1 $\forall x, y \quad \exp(x+y) = \exp x \exp y$
P2 $\forall x \quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$
P3 $\forall x \ \ \forall r \in \mathbb{Q} \quad \exp(rx) = (\exp x)^r$
P4 $\exp 1 = e$

D9

NOTATION : comme $\exp r = e^r$ pour r rationnel, $\exp x$ est noté e^x pour tout x réel ; les propriétés précédentes se réécrivent donc

P1 $\forall x, y \ \ e^{x+y} = e^x e^y$
P2 $\forall x \ \ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
P3 $\forall x \ \ \forall r \in \mathbb{Q} \quad e^{rx} = (e^x)^r$
P4 $e^1 = e$

2) Étude de la fonction exp.

PROP : l'ensemble de définition de exp est $\mathbb{R}$, et elle y est dérivable (donc continue).

Calcul de $\exp'$:

$$\exp' y = \exp y$$

D10

CORO : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions du type

$$x \mapsto \lambda e^{ax}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

D11

P6 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
P7 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (interprétation graphique)
P8 $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$
P9 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

D12

Tracé de la courbe.
3) Exponentielle de base a

DEF : si $a > 0$ et $\neq 1$, la fonction exponentielle en base a est la réciproque de la fonction logarithme en base a :

$$\boxed{x = \exp_a y \text{ (ou } a^y) \Leftrightarrow y = \ln_a x}$$

PROP :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a x = a^x = e^{x \ln a}$$
$$\log_a (b^x) = x \log_a b$$

D13

Remarque : il faut comprendre $\log_a x$ comme l'exposant de a si l'on exprime x comme puissance de a ; par exemple, $\log(2008)$ est le nombre x tel que $2008 = 10^x$.

4) Symbole a^b.

DEF :

1	$a^0 = 1$ quel que soit a (y compris $a = 0$)
2	si b est un *entier* > 0 $a^b = \underbrace{a.a.....a}_{b \text{ fois}}$ quel que soit a
3	si b est un *entier* < 0 $a^b = \dfrac{1}{a^{-b}}$ seulement pour $a \neq 0$
4	si $a > 0$ et b quelconque, $a^b = e^{b \ln a}$.

REMARQUES :

- a^b n'est donc défini pour tout b que si $a > 0$; si vous devez étudier une fonction $x \mapsto a(x)^{b(x)}$ vous devrez toujours l'étudier pour $a(x) > 0$.

- $\sqrt[3]{x}$ est défini pour tout x, tandis que $x^{1/3}$ n'est donc défini que pour $x > 0$!!!!

PROPRIÉTÉS :

1	$a^{b+c} = a^b a^c \quad (a > 0)$
2	$a^{b-c} = \dfrac{a^b}{a^c} \quad (a > 0)$
3	$\left(a^b\right)^c = a^{bc} = (a^c)^b \quad (a > 0)$

D14

Exemple de mésaventure pouvant arriver si l'on ne prend pas $a > 0$:

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\frac{1}{2}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

5) Fonctions puissances.

Étude de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ suivant les différentes valeur de α.

D15

VIII) FONCTIONS HYPERBOLIQUES

1) Définitions.

DEF : Les fonctions cosinus et sinus hyperbolique sont respectivement les parties paire et impaire de la fonction exponentielle :

$$\boxed{\mathrm{ch} x (\text{ou } \cosh\ x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \ \mathrm{sh}\, x (\text{ou } \sinh\ x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

Les fonctions tangente et cotangente hyperbolique sont définies par :

$$\boxed{\mathrm{th}\ x (\text{ou } \tanh\ x) = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\ x}, \coth x = \frac{\mathrm{ch}\ x}{\mathrm{sh}\, x}}$$

Remarque :

$$\boxed{\mathrm{th}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}}$$

2) Propriétés.

1.	$\begin{cases} e^x = \text{ch } x + \text{sh}\, x \\ e^{-x} = \text{ch } x - \text{sh}\, x \end{cases}$
2.	$\begin{cases} \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1 \\ 1 - \text{th}^2 x = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x} \\ \coth^2 x - 1 = \dfrac{1}{\text{sh}^2 x} \end{cases}$
3.	$\begin{cases} \text{ch } (a+b) = \text{ch } a \text{ch } b + \text{sh}\, a\, \text{sh}\, b, \ \text{ch } (a-b) = \text{ch } a \text{ch } b - \text{sh}\, a\, \text{sh}\, b \\ \text{sh}\,(a+b) = \text{sh}\, a \text{ ch } b + \text{ch } a\, \text{sh}\, b, \ \text{sh}\,(a-b) = \text{sh}\, a \text{ ch } b - \text{ch } a\, \text{sh}\, b \\ \text{th } (a+b) = \dfrac{\text{th } a + \text{th } b}{1 + \text{th } a \text{th } b}, \ \text{th } (a-b) = \dfrac{\text{th } a - \text{th } b}{1 - \text{th } a \text{th } b} \end{cases}$
4.	$\begin{cases} \text{ch } 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x = \dfrac{1 + \text{th}^2 x}{1 - \text{th}^2 x} \\ \text{ch } x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}, \text{ avec } t = \text{th} \dfrac{x}{2} \end{cases}$
5.	$\begin{cases} \text{ch } 2x = 2\text{ch}^2 x - 1 \\ 1 + \text{ch } x = 2\text{ch}^2 \dfrac{x}{2} \end{cases}$
6.	$\begin{cases} \text{ch } 2x = 1 + 2\,\text{sh}^2 x \\ \text{ch } x - 1 = 2\,\text{sh}^2 \dfrac{x}{2} \end{cases}$
7.	$\begin{cases} \text{sh}\, 2x = 2\,\text{sh}\, x \cosh x = \dfrac{2 \text{ th } x}{1 - \text{th}^2 x} \\ \text{sh}\, x = \dfrac{2t}{1-t^2}, \text{ avec } t = \text{th} \dfrac{x}{2} \end{cases}$

D16
2) Étude de ch et sh.

PROP : ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$.
Tableau de variations et limites au bornes.

REM : les courbes de ch et sh sont asymptotes en $+\infty$ à la courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^x$.
Tracé des courbes.
D17

3) Étude de th et coth.

PROP : th est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\text{th}' = \dfrac{1}{\text{ch}^2} = 1 - \text{th}^2$ (à savoir par coeur).
coth est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\coth' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2} = 1 - \coth^2$ (inutile de retenir).

D18
Tableaux de variations et limites au bornes.

Tracé des deux courbes dans le même graphique.

Pourquoi des fonctions *circulaires* et *hyperboliques* ?

Car elles permettent de paramétrer, les premières un cercle, les deuxièmes une hyperbole, en effet :

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$
$$x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} x = \pm \text{ch } t \\ y = \text{sh}\, t \end{cases}$$

IX) FONCTIONS HYPERBOLIQUES RÉCIPROQUES.

1) Fonction réciproque de sh.

DEF : la fonction argsh (ou argsinh) est la fonction réciproque de sinh :

$$x = \operatorname{argsh} y \Leftrightarrow y = \operatorname{sh} x$$

Justification de cette définition : D19

NOTE : arg est l'initiale d'argument, à prendre dans le sens suivant : l'argument de $f(x)$ est x.
PROP : argsh est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}$.

D20

Tracé de la courbe.
Calcul de argsh :

$$\operatorname{argsh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

D21

CORO :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{argsh} x$$

PROP : la fonction argsh est impaire.

2) Fonction réciproque de ch .
DEF : la fonction argch est la fonction réciproque de la restriction de ch à $[0, +\infty[$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \operatorname{argch} y \\ y \in [1, +\infty[\end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \operatorname{ch} x \\ x \in [0, +\infty[\end{array} \right.$$

Justification de cette définition : D22

PROP : l'ensemble de définition de argch est $[1, +\infty[$, elle y est continue, mais elle n'est dérivable que sur $]1, +\infty[$.

D23

Tracé de la courbe.
Calcul de argch :

$$\operatorname{argch}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

D24

4) Fonction réciproque de th.
DEF : la fonction argth est la fonction réciproque de th :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \operatorname{argth} y \\ y \in]-1, 1[\end{array} \right. \Leftrightarrow y = \operatorname{th} x$$

Justification de cette définition : D25

PROP : l'ensemble de définition de $x = $argth y est $]-1, 1[$, et elle y est dérivable (donc continue).

D26

Tracé de la courbe.

Calcul de argth :

$$\text{argth}'y = \frac{1}{1-y^2}$$

D27

PROP : la fonction argth est impaire.

EXERCICE : montrer les expressions explicites :

argth $x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, argch $x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, argsh $x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.