## الجزء الثالث العلاقات

لتكن $R$ علاقة ثنائية معرفة في مجموعة غير خالية $E$. نقول عن العلاقة $R$ إنها:

- **انعكاسية** إذا كان : $\forall x \in E: \quad xRx$
- **تناظرية** إذا كان : $\forall x, y \in E: \quad xRy \Rightarrow yRx$
- **ضد تناظرية** إذا كان : $\forall x, y \in E: \quad (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$
- **متعدية** إذا كان : $\forall x, y, z \in E: \quad (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$.

**علاقات التكافؤ:** نقول عن علاقة ثنائية في مجموعة غير خالية $E$ إنها علاقة **تكافؤ** إذا كانت انعكاسية، تناظرية ومتعدية.

إذا كانت $R$ علاقة تكافؤ معرفة في مجموعة غير خالية $E$ و $x$ عنصرا من $E$،
نسمي **صف تكافؤ** $x$ ترديد $R$ (أو وفق $R$ ) المجموعة $\dot{x} = \{y \in E: xRy\}$، ونسمي $x$ إحدى ممثلات الصف.
تسمى مجموعة كل صفوف التكافؤ (في $E$ ) وفق $R$، **مجموعة حاصل القسمة** ونرمز لها بـــ $\frac{E}{R}$.

**ملاحظة:** تشكل مجموعة صفوف التكافؤ تجزئة للمجموعة $E$.

في $Z$ مجموعة الأعداد الصحيحة، العلاقة $R$ المعرفة بـــ:
$xRy \Leftrightarrow x \equiv y\,[3]$ ( $x$ يوافق $y$ ترديد $R$ أو 3 )
أي $xRy \Leftrightarrow \exists k \in Z: \ x - y = 3k$.
هي علاقة تكافؤ.
ولدينا صف تكافؤ 0 هو: $\dot{0} = \{0 + 3k : \ k \in Z\}$.
لما يمسح $k$ كل المجموعة $Z$ نحصل على $\dot{0} = \{0,3,6,\ldots\} \cup \{-3,-6,-9,\ldots\}$
صف تكافؤ 1 هو $\dot{1} = \{1 + 3k: \ k \in Z\}$
أي $\dot{1} = \{1,4,7,\ldots\} \cup \{-2,-5,-8,\ldots\}$
صف تكافؤ 2 هو $\dot{2} = \{2 + 3k: \ k \in Z\}$
أي $\dot{2} = \{2,5,8,\ldots\} \cup \{-1,-4,-7,\ldots\}$.
ومجموعة حاصل القسمة هي $\frac{Z}{R} = \{\dot{0},\dot{1},\dot{2}\}$.

## علاقات الترتيب

نقول عن علاقة ثنائية $R$ في مجموعة $E$ إنها علاقة **ترتيب** إذا كانت انعكاسية، ضد تناظرية ومتعدية. نقول أيضا إن $E$ مرتبة بـــ $R$.

علاقة ترتيب $R$ هي **ترتيب كلي** إذا كان كل عنصرين $x$ و $y$ من $E$ يقبلان المقارنة بـــ $R$ أي $xRy$ أو $yRx$، **وجزئي** في الحالة الأخرى.

## العناصر الخاصة في مجموعة مرتبة

لتكن $E$ مجموعة مرتبة بعلاقة ترتيب $R$.

**أصغر** و**أكبر عنصر**:

$m$ من $E$ هو **أصغر عنصر** في $E$ إذا كان: $\forall x \in E: \quad mRx$.

$M$ من $E$ هو **أكبر عنصر** في $E$ إذا كان: $\forall x \in E: \quad xRM$.

هاذان العنصران، إن وجدا، فهما وحيدان.

**العناصر الحادة من الأعلى:** $M$ من $E$ هو عنصر **حاد من الأعلى** لجزء غير خال $A$ من $E$ إذا كان:

$\forall x \in A: \quad xRM$.

هذا العنصر، إن وجد، فهو ليس بالضرورة وحيد.

تعرف العناصر الحادة من الأدنى بشكل مشابه.

**الحد الأعلى** لجزء $A$ من $E$ هو أصغر العناصر الحادة من الأعلى للجزء $A$.

يعرف الحد الأدنى بشكل مشابه للحد الأعلى.

نرمز للحد الأعلى للمجموعة $A$ بـــ $\sup A$ وللحد الأدنى بـــ $\inf A$.

لاحظ، أنه بالنسبة للعلاقة $R$، فإن العنصر الذي يكتب من اليسار هو أصغر (وفق العلاقة $R$) من الذي يكتب من اليمين.

**مثال:** نعرف في $IN^*$ مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة العلاقة $R$ التالية:

$\left(x, y \in IN^*\right): \; \left(xRy \iff y \text{ يقسم } x\right)$.

يجب أولا التعبير عن هذه العلاقة بعبارة رياضية لكي يمكن التحكم فيها والتعامل معها.

$x$ يقسم $y$ تعني: $\exists k \in IN^* :\ y = kx$

(أ) العلاقة $R$ ترتيب لأنها:

- انعكاسية: إذ أن $\forall x \in IN^*\ \exists k = 1 \in IN^* : x = kx$

أي أن $\forall x \in IN^* : xRx$.

- ضد تناظرية: ليكن $x$ و $y$ من $IN^*$ بحيث $xRy \wedge yRx$.

أي $\exists k, k' \in IN^* :\ y = kx\ \wedge\ x = k'y$

بالتعويض نجد $\exists k, k' \in IN^* :\ y = kk'y$

أي $\exists k, k' \in IN^* :\ (1 - kk')y = 0$

وبما أن $y \neq 0$ ينتج أن $1 - kk' = 0$ أي $kk' = 1$

وبما أن $k$ و $k'$ عددان طبيعيان، ينتج أن $k = k' = 1$ وبالتالي $x = y$.

- متعدية: ليكن $x$ و $y$ و $z$ من $IN^*$ بحيث $xRy \wedge yRz$.

أي $\exists k, k' \in IN^* :\ y = kx\ \wedge\ z = k'y$

بالتعويض نجد $\exists k'' = k'k \in IN^* :\ z = (k'k)x$

وبهذا يصبح $xRz$.

(ب) العلاقة $R$ ليست ترتيبا كليا لأنه يوجد $y = 3$ و $x = 2$ من $IN^*$ لكن لا $xRy$ ولا $yRx$ محققة.

(ج) لتكن $A = \{6, 8, 24\},\ B = \{3, 6, 9, 12\}$ مجموعتين جزئيتين من $IN^*$.

- $A$ ليس لها أصغر عنصر، لأنه لا يوجد $m \in A$ بحيث $m$ يقسم كل عناصر $A$.

و $A$ لها أكبر عنصر وهو 24 لأن $24 \in A$ و $\forall x \in A : xR(24)$

أي كل عناصر $A$ تقسم 24.

الحواد العليا للمجموعة $A$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على 6، 8 و 24 وهي المجموعة $\{24k :\ k \in IN^*\}$ مجموعة المضاعفات المشتركة لعناصر $A$، أصغرها (بمفهوم العلاقة $R$) هو 24 وبالتالي هو الحد الأعلى لــ $A$.

الحواد الدنيا لــ $A$ هي العنصر $m \in IN^*$ بحيث $\forall x \in A:\ mRx$ أي المجموعة $\{1, 2\}$، أكبرها العدد 2 هو الحد الأدنى لــ $A$ (القاسم المشترك الأعظم لعناصر $A$).

- بالنسبة للمجموعة $B$: لها أصغر عنصر وهو 3، في نفس الوقت هو الحد الأدنى لها، ليس لها أكبر عنصر، حوادها الدنيا هي المجموعة $\{1, 3\}$، حوادها العليا هي مجموعة مضاعفات العدد 36 في $IN^*$، حدها الأعلى هو إذن 36.