الجزء الرابع التطبيقات

مفهوم التطبيق: لتكن E, F مجموعتين غير خاليتين.

تسمى العلاقة الخاصة $f: E \to F$ المعرفة على E بأكملها والتي ترفق بكل عنصر x من E ، العنصر الوحيد $f(x)$ من F **تطبيقا**، أي نسمي تطبيقا كل علاقة $f: E \to F$ تحقق الاستلزام التالي:

$$\forall x, x' \in E: \left(x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')\right)$$

تسميات متداولة:

نسمي E مجموعة **انطلاق** التطبيق f.

نسمي F مجموعة **وصول** التطبيق f.

يدعى العنصر الوحيد $y \in F$ الذي يحقق: $y = f(x)$ " صورة العنصر x وفق التطبيق f ".

و نقول عندئذ إن العنصر $x \in E$ هو **سابقة** وفق التطبيق f للعنصر $y \in F$.

ملاحظة: إذا كان f تطبيقا للمجموعة E في المجموعة F ، فنكتب اختصارًا: $f: E \to F$ أو $E \xrightarrow{f} F$.

تساوي تطبيقين: نقول عن تطبيقين $f, g: A \to B$ لهما نفس مجموعة البدء والوصول، إنهما **متساويان** إذا كان: $\forall x \in A:\ f(x) = g(x)$

ويكونان غير متساويين إذا كانا مختلفين في مجموعة البدء أو الوصول أي: $\exists x \in A:\ f(x) \neq g(x)$.

تركيب التطبيقات: لتكن المجموعات الثلاث E, F, G . و ليكن التطبيقين f, g المعرفين كما يلي:

$f: E \to F$ و $g: F \to G$.

نسمي **تركيب التطبيقين** f و g، التطبيق الذي نرمز له بـــ $h = g \circ f$ و الممثل بالمخطط التالي:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "(g \circ f)"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

أي أن: $h: E \longrightarrow G$ و $\forall x \in E: h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$.

تنبيه: إن التركيب $g \circ f$ معرف فقط إذا كانت مجموعة وصول التطبيق f تساوي (أو هي جزء من) مجموعة انطلاق التطبيق g (لاحظ المخطط السابق).

مثال: لنعرف التطبيقين f, g بالشكل الآتي:

$$f : IR \longrightarrow IR \qquad\qquad g : IR^* \longrightarrow IR^*$$
$$x \mapsto f(x) = 0 \quad \text{و} \quad x \mapsto g(x) = \frac{1}{x}$$

عندئذ يصبح لدينا: (غير موجود) $\forall x \in IR : (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0)$.

وبالتالي فإن $g \circ f$ غير معرف، ذلك لأن مجموعة وصول التطبيق f ليست جزءا من مجموعة انطلاق التطبيق g ، $(IR \not\subset IR^*)$.

في حين أنه لدينا: (موجود) $\forall x \in IR^* : (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

إذن في هذا المثال: $g \circ f$ غير معرف، و لكن $f \circ g$ معرف.

و تنتج، عن هذا المثال الملاحظة، الهامة التالية:

ملاحظة: إن تركيب التطبيقات عملية **غير تبديلية** بصورة عامة، و لتوضيح ذلك أكثر، نعطي المثال التالي:

$$g : IR \longrightarrow IR \qquad\qquad f : IR \longrightarrow IR$$
$$x \mapsto 2x \quad \text{و} \quad x \mapsto x^2$$

إذن:

$$\forall x \in IR : (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$
$$\forall x \in IR : (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2(x)^2 = 2x^2$$

و هو ما يعني تماما أن: $f \circ g \neq g \circ f$ ، بصفة عامة، أي أن تركيب التطبيقات ليس تبديليا عموما.

خاصية: إن تركيب التطبيقات هو عملية **تجميعية:**

لتكن المجموعات الأربع غير الخالية E, F, G, L . و لتكن التطبيقات الثلاثة f, g, h المعرفة كما يلي:

$$f : E \to F \quad \text{و} \quad g : F \to G \quad ، h : G \to L$$

عندئذ فإن تركيب التطبيقات الثلاثة f ، g و h هو التطبيق الذي نرمز له بالرمز $h \circ g \circ f$ ،

و المعرف بـــ: $h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ ، ذلك لأنه مهما كان x من E لدينا:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

التطبيق المطابق: لتكن E مجموعة غير خالية.

نعرف التطبيق المطابق للمجموعة E في نفسها، بأنه التطبيق الذي نرمز له عادةً بالرمز Id_E أو بالرمز I_E والمعرف بـــ $\forall x \in E : Id_E(x) = x$.

ملاحظة: لتكن E, F مجموعتين غير خاليتين.

من أجل كل تطبيق $f : E \to F$ ، لدينا: $f \circ Id_E = Id_F \circ f = f$.

اقتصار و تمديد تطبيق: ليكن f تطبيقا لمجموعة غير خالية E في مجموعة غير خالية F .

و ليكن E_1 جزءا غير خالٍ من المجموعة E.

نسمي **اقتصار** التطبيق f على المجموعة E_1 ، التطبيق f_1 المعرف من المجموعة E_1 في المجموعة F والمعرف بـــ:

$$\forall x \in E_1 \ : f_1 \ (x) = f(x)$$

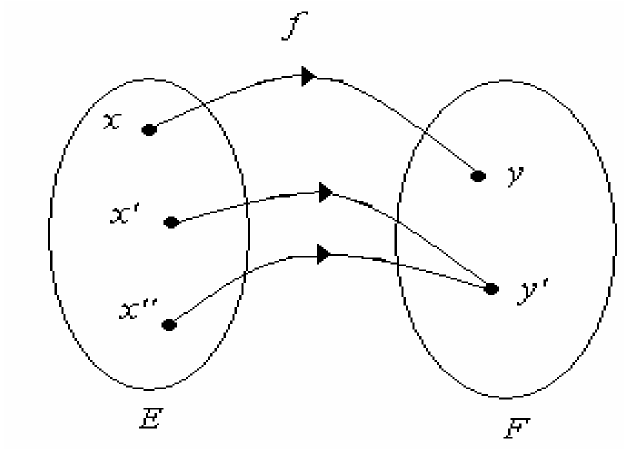
و نقول عندئذ عن f إنه **تمديد** لـــ f_1 .

مثال: لتكن المجموعات الثلاث المعرفة كما يلي: $E_1 = \{ x, x' \}$, $F = \{ y, y' \}$, $E = \{ x, x', x'' \}$.

و لنعرف التطبيق f بالشكل:

$$f : E \to F : \quad f(x) = y, \ f(x') = y', \quad f(x'') = y'$$

إذن التطبيق f يمثل بالمخطط البياني التالي:



ونعرف التطبيق f_1 بـــ :

$f_1 : E_1 \to F$ و $f_1(x) = y, \ f_1(x') = y'$.

لاحظ أن: $y = f_1(x) = f(x), \quad y' = f_1(x') = f(x')$.

واضح إذن أن التطبيق f_1 هو اقتصار للتطبيق f على المجموعة E_1 .