تمارين الفصل I

تمرين1: نعرف الرابطة "w" ونسميها " الفصل الإقصائي" والمعرفة كما يلي: انطلاقا من قضيتين p و q نعرف قضية ثالثة "$p \text{ w } q$".

تكون "$p \text{ w } q$" صحيحة فقط في الحالتين:

الحالة الأولى: p صحيحة و q خاطئة،   الحالة الثانية: p خاطئة و q صحيحة.

("$p \text{ w } q$" خاطئة في الحالات الأخرى).

1. اكتب جدول الحقيقة لــ "w".
2. اثبت أن: $(p \text{ w } q) \Leftrightarrow \neg\,(p \Leftrightarrow q)$.
3. اثبت أنه إذا كانت p و q و r ثلاث قضايا فإن:
   1.3 $p \text{ w } (q \text{ w } r) \Leftrightarrow (p \text{ w } q) \text{ w } r$
   2.3 $p \wedge (q \text{ w } r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \text{ w } (p \wedge r)$
4. اثبت أن: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
5. استنتج أنه إذا كانت A و B و C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E فإن:
   $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

الحل: 1. جدول الحقيقة لــ "w".

p	q	$p \text{ w } q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

2. إثبات $(p \text{ w } q) \Leftrightarrow \neg\,(p \Leftrightarrow q)$ بجدول الحقيقة:

p	q	$p \text{ w } q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg(p \Leftrightarrow q)$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	1	0

لاحظ تطابق العمودين المقابلين للقضيتين $(p \text{ w } q)$ و $\neg\,(p \Leftrightarrow q)$. ومنه تكافؤ القضيتين.

3. نستعمل جدول الحقيقة لكل من القضيتين ثم تتم المقارنة كما يلي: عمود لكل من القضايا

$p,\ q,\ r,\ p\mathrm{w}q,\ q\mathrm{w}r,\ p\mathrm{w}(q\mathrm{w}r),\ (p\mathrm{w}q)\mathrm{w}r$ هذا بالنسبة لــ 1.3

و $p,\ q,\ r,\ p\wedge q, p\wedge r,\ q\mathrm{w}r,\ p\wedge(q\mathrm{w}r), (p\wedge q)\mathrm{w}(p\wedge r)$ بالنسبة لــ 2.3،

ثم إعطاء القيمة 1 أو 0 للقضايا p ، q و r حسبما تكون صحيحة أو خاطئة على الترتيب، حساب قيم القضايا الأخرى (1 أو 0) لملإ الجدول. إذن هناك ثمانية أسطر، ثم تتم مقارنة العمودين الأخيرين في الجدول.

.4

من تعريف الفرق التناظري: $x\in A\Delta B \Leftrightarrow x\in(A\cup B)-(A\cap B)$

$\Leftrightarrow x\in A\cup B \ \wedge\ x\notin A\cap B$

من تعريف الاتحاد، التقاطع وفصل القضايا: $\Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B)\ \wedge\ (x\notin A\ \vee x\notin B)$

هناك أربع حالات منها: $(x\in A\wedge x\notin A)$ و $(x\in B\wedge x\notin B)$ متناقضتان (خاطئة دوما)، لذلك:

$\Leftrightarrow (x\in A\ \wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)$

$\Leftrightarrow\ x\in(A-B)\cup(B-A)$

من التكافؤ السابق نستنتج أن: $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$.

لاحظ أن: $x\in A\Delta B\ \Leftrightarrow\ (x\in A)\ \mathrm{w}\ (x\in B)$.

5. نستعمل نتيجة السؤال 4 :

$$x\in A\Delta(B\Delta C)\Leftrightarrow (x\in A)\ \mathrm{w}\ (x\in B\Delta C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A)\ \mathrm{w}\ ((x\in B)\ \mathrm{w}\ (x\in C))$$

من نتيجة السؤال 3 لدينا:

$$\Leftrightarrow ((x\in A)\ \mathrm{w}\ (x\in B))\ \mathrm{w}\ \ (x\in C)$$

وبالتالي: $\Leftrightarrow\ x\in(A\Delta B)\Delta C$

من هذا التكافؤ نستنتج: $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$. أي أن الفرق التناظري عملية تجميعية في $P(E)$.

تمرين2: لتكن p، q و r ثلاث قضايا.

1. لتكن القضية المركبة A التالية: $p\Leftrightarrow(q\Rightarrow r)$.
   أعط مثالا عن القضية A.
   بين أن A تكافئ $(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$.
2. اثبت أن: (أ) $[(p\wedge\neg p)\vee q]\Leftrightarrow q$ و (ب) $[(p\vee\neg p)\wedge q\ ]\Leftrightarrow q$.
   لتكن القضية المركبة B: $[((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg p\vee q)]\vee\neg r$.
   بين أن $\neg B$ مكافئ لــ $p\wedge\neg q\wedge r$.

الحل: بالنسبة لــ 1.

مثال عن A: نأخذ تطبيقا $f : E \to F$ ونضع

p القضية: (f متباين)

q القضية: $\left(\forall x, y \in E : f(x) = f(y)\right)$

r القضية: $(x = y)$

تصبح القضية A تعبر على تعريف تباين التطبيق f.

لإيجاد صيغة لنفي A قم بتحويل كل استلزام (في A) من الشكل $(a \Rightarrow b)$ إلى القضية المكافئة له $(\neg a \vee b)$ ثم وزع الرابط "$\wedge$" على الرابط "$\vee$".

2. يمكن استعمال جدول الحقيقة للتأكد من (أ) و (ب) أو بالملاحظة التالية:

القضية $p \wedge \neg p$ دوما خاطئة لذلك صحة أو خطأ (أ) يتعلق فقط بصحة أو خطا q؛ أما الأخرى فلدينا القضية $p \vee \neg p$ دوما صحيحة لذلك صحة أو خطأ (ب) يتعلق فقط بصحة أو خطا q.

بالنسبة للشطر الأخير لدينا:

من كون $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ فإن:

$$[((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (\neg p \vee q)] \vee \neg r \quad \Leftrightarrow \quad [((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge \neg(p \wedge \neg q)] \vee \neg r$$

الرابط "$\wedge$" توزيعي على الرابط "$\vee$"

$$\Leftrightarrow \quad [((p \wedge \neg q) \wedge (\neg(p \wedge \neg q))) \vee (r \wedge \neg(p \wedge \neg q))] \vee \neg r$$

نستعمل (أ):

$$\Leftrightarrow \quad [(r \wedge \neg(p \wedge \neg q))] \vee \neg r$$

بتوزيع الرابط "$\vee$" على الرابط "$\wedge$".

$$\Leftrightarrow \quad (r \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

نستعمل (ب):

$$\Leftrightarrow \quad \neg p \vee q \vee \neg r$$

إذن نستنتج أن $B \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee \neg r$

وبالتالي: $\neg B \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q \vee \neg r) \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r$.

تمرين3: إذا كانت A و B و C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E، فاثبت صحة القضايا التالية:

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. (الاتحاد توزيعي على التقاطع).
2. $A - B = A \cap \overline{B}$ و $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
3. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$. (التقاطع توزيعي على الفرق التناظري).
4. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.
5. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
7. $A \Delta B = B \Delta A$.

8. $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B$.

9. $(A\Delta B)\Delta C = \left(A \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$.

استنتج أن $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

الحل: لنجب عن القضايا التي نراها تساعد على إثبات القضايا التي تليها.

2. من تعريف الفرق بين مجموعتين جزئيتين: $x \in A - B \iff x \in A \wedge x \notin B$

من تعريف المتممة: $\iff x \in A \wedge x \in \overline{B}$

ومن تعريف التقاطع: $\iff x \in A \cap \overline{B}$

من التكافؤ نستنتج المساواة المطلوبة. مستعملين هذه النتيجة و 4. من التمرين1 ينتج الجزء الثاني.

3. من 2.

$$(A \cap B)\Delta(A \cap C) = \left[(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right)\right] \cup \left[\left(\overline{A \cap B}\right) \cap (A \cap C)\right]$$

(متممة التقاطع)

$$= \left[(A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{C}\right)\right] \cup \left[\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap (A \cap C)\right]$$

توزيع التقاطع على الاتحاد:

$$= \left[\left(A \cap B \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right)\right] \cup \left[\left(\overline{A} \cap A \cap C\right) \cup \left(\overline{B} \cap A \cap C\right)\right]$$

من تبديل التقاطع وكون $A \cap \overline{A} \cap B = \phi \cap B = \phi$ و $\overline{A} \cap A \cap C = \phi \cap C = \phi$:

$$= \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{B} \cap A \cap C\right)$$

توزيع التقاطع على الاتحاد:

$$= A \cap \left[\left(B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{B} \cap C\right)\right]$$

أخيرا، من 2. ينتج:

$$= A \cap [B\Delta C]$$

.8

$$\begin{aligned}
x \in \overline{A\Delta B} &\iff x \notin A\Delta B \\
&\iff x \notin \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \\
&\iff x \notin A \cap \overline{B} \ \wedge \ x \notin \overline{A} \cap B \\
&\iff \left(x \notin A \vee x \notin \overline{B}\right) \wedge \left(x \notin \overline{A} \vee x \notin B\right)
\end{aligned}$$

هناك أربع حالات منها $\left(x \notin A \wedge x \notin \overline{A}\right)$ و $\left(x \notin \overline{B} \wedge x \notin B\right)$ متناقضة، لذلك:

$$\begin{aligned}
&\iff \left(x \notin A \wedge x \notin B\right) \vee \left(x \notin \overline{A} \wedge x \notin \overline{B}\right) \\
&\iff \left(x \in \overline{A} \wedge x \notin B\right) \vee \left(x \notin \overline{A} \wedge x \in B\right) \\
&\iff \left(x \in \overline{A} - B\right) \vee \left(x \in B - \overline{A}\right) \\
&\iff x \in \overline{A}\Delta B
\end{aligned}$$

من التكافؤ تنتج المساواة المطلوبة.

9. استعمل 2. ثم 8. وقم بتوزيع التقاطع على الاتحاد.

تمرين4: لتكن $E_1, E_2, \ldots, E_n$ أجزاء من مجموعة E. اثبت بالتراجع على n أن:

متممة التقاطع تساوي اتحاد المتممات $$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} E_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{E}_i \quad (1)$$

متممة الاتحاد تساوي تقاطع المتممات $$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} E_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{E}_i \quad .(2)$$

الحل: لنثبت المتطابقة (1).

القضية (مساواة المجموعتين الواردتين في المتطابقة) تتعلق بوسيط طبيعي n. لنثبت المتطابقة بالتراجع على n. ترقيم المجموعات هنا، يبدأ بـــ 1 وينتهي بـــ n، بإمكاننا الترقيم من 0 إلى $n-1$. لذلك بدل أخذ المرتبة الأولى، في التراجع، هي $n=0$ نأخذها هي $n=1$.

إذن، لما $n=1$ المتطابقة محققة دون برهان.

ولما $n=2$. ليكن x عنصرا كيفيا من E،

لدينا $$x \in \overline{E_1 \cap E_2} \iff x \notin E_1 \cap E_2$$

لأن العنصر x غير مشترك $$\iff (x \notin E_1 \ \vee \ x \notin E_2)$$

من تعريف متممة مجموعة $$\iff (x \in \overline{E}_1 \ \vee \ x \in \overline{E}_2)$$

من تعريف اتحاد مجموعتين $$\iff x \in \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$$

من التكافؤ وتعريف مساواة مجموعتين، ينتج أن المتطابقة محققة في هذه الحالة.

لنفرض الآن أن $n \geq 2$ والمتطابقة محققة من أجل n ونثبت صحتها من أجل $n+1$.

نضع $F_1 = \bigcap_{i=1}^{n} E_i, \quad F_2 = E_{n+1}$.

من فرضية التراجع لدينا: $\overline{F_1} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{E}_i$.

إذن $$\overline{\bigcap_{i=1}^{n+1} E_i} = \overline{F_1 \cap F_2}$$

المتطابقة صحيحة من أجل $n=2$ $$= \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$$

من خاصية التراجع $$= \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{E}_i \right) \cup \overline{E}_{n+1}$$

الاتحاد تجميعي $$= \bigcup_{i=1}^{n+1} \overline{E}_i$$

إذن المتطابقة محققة من أجل كل عدد طبيعي n.

وبطريقة مشابهة تثبت الخاصية (2).