الفصل II :

البنية الجبرية

الجزء الأول

قانون التركيب الداخلي والبنى الجبرية الأساسية: تعريف القانون الداخلي – الخاصية التجميعية لقانون التركيب الداخلي – العنصر الحيادي – العنصر النظير – الخاصية التبديلية – الزمرة والزمرة الجزئية – تماثل الزمر.

الجزء الأول بنية الزمرة

قانون التركيب الداخلي: لتكن E مجموعة. نسمي $(*)$ قانون **تركيب داخلي** (أو **عملية داخلية**) على E كل تطبيق f من $E \times E$ نحو E معرف بـــ $f(x,y) = x * y \qquad \forall x, y \in E :$.

يعبر التعريف على أن تركيب كل عنصرين من المجموعة E هو عنصر وحيد من E.
العملية$(*)$ المعرفة على Z (مجموعة الأعداد الصحيحة) بـــ $x * y = x - y$ هي عملية داخلية في Z.
لكن إذا اعتبرنا نفس العملية على مجموعة الأعداد الطبيعية IN فهي ليست داخلية لأن $x - y$ ليس بالضرورة عنصرا من IN (رغم كون x و y من IN)، وذلك، مثلا بأخذ $x = 1,\ y = 2$.

الزمرة

لتكن G مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية $(*)$؛ نقول أن$(G,*)$ لها **بنية زمرة** (أو **زمرة**) إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. العملية **تجميعية:** $\forall x, y, z \in G:\ x*(y*z) = (x*y)*z$.
2. يوجد في G عنصر **حيادي:** يوجد e من G بحيث $\forall x \in G:\ x*e = e*x = x$.
3. لكل عنصر من G **نظير:** مهما كان x من G يوجد a من G بحيث $a*x = x*a = e$.

نقول عن زمرة $(G,*)$ أنها **تبديلية** إذا كان: $\forall x, y \in G:\ x*y = y*x$.

رغم كون العملية $(-)$ داخلية في Z لكنها لا تجعل منها زمرة لأن $(-)$ ليست تجميعية أي يوجد $x, y, z \in Z$ بحيث $x - (y - z) \neq (x - y) - z$
وكذلك بالنسبة لنفس العملية لا يوجد عنصر حيادي.

ملاحظة: العنصر الحيادي (والنظير)، إن وجد، فهو وحيد.

ترميز: إن لم ترد أي إشارة إلى عملية الزمرة نعتبرها ضربية، عمليتها $(\cdot)$، ونعبر عن الزمرة $(G,\cdot)$ بـــ G وبدل كتابة $x \cdot y$ نكتب xy فقط.
في زمرة ضربية نعبر عن نظير x بـــ x^{-1}،
أما إذا كانت الزمرة جمعية (عمليتها +) نعبر عن نظير x بـــ $-x$.

إذا كان n عددا طبيعيا غير معدوم والعملية في الزمرة هي $(*)$
نضع: $x^n = x * x * \cdots * x$ (x مركب مع نفسه n مرة).
أما إذا كانت العملية في الزمرة هي $(+)$ وكان n عددا طبيعيا غير معدوم
نضع: $nx = x + x + \cdots + x$ (x مركب مع نفسه n مرة).

ملاحظة: في زمرة $(G,*)$ لدينا نظير جداء عنصرين هو $(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$.
و $(x*y)^2=x*y*x*y$ لذلك، لما تكون الزمرة ليست تبديلية فإن $(x*y)^2\neq x^2*y^2$ بصفة عامة.

أمثلة : 1. $(Z,+)$ مجموعة الأعداد الصحيحة مزودة بعملية الجمع العادي لها بنية زمرة تبديلية. ونقول أنها زمرة جمعية. عنصرها الحيادي 0 (الصفر).

2. من أجل كل عدد طبيعي n $(n\geq 2)$ وعلاقة التكافؤ R المعرفة في Z بــ $xRy\Leftrightarrow x\equiv y\,[n]$، أي $xRy\Leftrightarrow \exists k\in Z:\ x-y=kn$.

مجموعة حاصل القسمة هي $G=\dfrac{Z}{R}=\{\dot{x}:\ x\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}\}$ نزودها بعملية جمع الصفوف:
$\dot{x},\dot{y}\in G:\ \dot{x}+\dot{y}=\dot{k}$ حيث $k=x+y$.
(جمع الصفوف في G معرف عن طريق الجمع العادي للأعداد في Z).
باستعمال التعاريف يمكن بسهولة إثبات أن $(G,+)$ لها بنية زمرة تبديلية.
عنصرها الحيادي هو $\dot{0}=\{kn:\ k\in Z\}$ صف الصفر (مضاعفات العدد n في Z)؛
نظير $\dot{x}$ في G هو صف $-x$.

3. نضع: A مجموعة التطبيقات المتقابلة من مجموعة غير خالية E في نفسها. إن A مزودة بعملية $(\circ)$ تركيب التطبيقات هي زمرة، عنصرها الحيادي التطبيق المطابق من E في نفسها، نظير تطبيق f هو التطبيق العكسي له f^{-1}. ولدينا، بصفة عامة الزمرة $(A,\circ)$ ليست تبديلية.

ترميز: نرمز عادة لزمرة حاصل القسمة الواردة في المثال 2 أعلاه بـــ

.Erreur ! Signet non défini.

في كل زمرة توجد أجزاء، هي في حد ذاتها لها بنية زمرة ولها أهميتها لدراسة الزمرة، وفي ما يلي نتطرق إلى بعض منها.

الزمر الجزئية لزمرة

لتكن G زمرة (ضربية) عنصرها الحيادي e. يكون جزء غير خال H من G **زمرة جزئية** من G إذا تحقق :

1. شرط الاستقرار: $\forall x,y\in H:\ xy\in H$،
2. شرط وجود النظير: $\forall x\in H:\ \ x^{-1}\in H$.

مثال: لتكن G زمرة ضربية ليست بالضرورة تبديلية، و x عنصرا من G مثبتا.
نضع $C(x)=\{g\in G:\ gx=xg\}$.
($C(x)$ هي مجموعة كل عناصر G التي تقبل المبادلة مع x).

لنبين أن $C(x)$ زمرة جزئية من G.

نفرض أن e هو العنصر الحيادي لـــ G.

من التعريف، واضح أن $C(x) \subseteq G$ أي أن $C(x)$ جزء من G؛ فلنبين أنه غير خال.

بما أن $x, e \in G$ فإن المساواة $ex = xe$ محققة في G لذلك $e \in C(x)$ وبالتالي $C(x) \neq \phi$.

لنثبت الآن أن $C(x)$ مستقرة.

من أجل $a, b \in C(x)$ لدينا :

من التجميع في G	$(ab)x = a(bx)$
لأن $b \in C(x)$	$= a(xb)$
مرة أخرى، من التجميع في G	$= (ax)b$
لأن $a \in C(x)$	$= (xa)b$
من التجميع في G	$= x(ab)$

أي أن $ab \in C(x)$. إذن $C(x)$ مستقرة بالعملية.

ليكن $g \in C(x)$ ولنبين أن نظير g ينتمي إلى $C(x)$ أي $g^{-1}x = xg^{-1}$.

بما أن G زمرة فإن $g^{-1} \in G$. وبما أن $gx = xg$، بتركيب g^{-1} من اليمين ومن اليسار على طرفي المساواة ينتج $g^{-1}x = xg^{-1}$، ($g^{-1}g = gg^{-1} = e$). وبالتالي $g^{-1} \in C(x)$.

مما سبق نستنتج أن $C(x)$ زمرة جزئية من G.

ملاحظة: H زمرة جزئية من زمرة G تعني أن مقصور عملية G على H يعطي H بنية زمرة.

تسهل النظرية التالية استعمال التعريف السابق.

نظرية1.1: إذا كان H جزء غير خال من زمرة G فإن القضيتين التاليين متكافئتان:

1. H زمرة جزئية من زمرة G،
2. $\forall x, y \in H: \; xy^{-1} \in H$.

البرهان : نفرض أن القضية 1. محققة وليكن x, y عنصرين من H.

إذن $y^{-1} \in H$ ومن كون $x, y^{-1} \in H$ يصبح $xy^{-1} \in H$. وبالتالي 2. محققة.

بفرض 2. محققة و e العنصر الحيادي لـــ G، ومن أجل x, y من H لدينا $e = xx^{-1} \in H$؛ من كون e و y من H يؤدي إلىأن $y^{-1} = ey^{-1} \in H$. أخيرا $x, y^{-1} \in H$ يؤدي إلى $xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$.