

Première épreuve de moyenne durée**Exercice 1 (6 points)**

On veut exprimer le volume V d'un corps en fonction de sa température T , et de sa pression P . On donne les coefficients calorimétriques $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ et $\lambda = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$.

1° Quelle est la relation qui lie dV à dT et dP ?

2° Un morceau de métal est pris à 20°C sous une pression de 1 atm. Déterminer la pression qu'il faut exercer sur ce morceau de métal pour que son volume reste constant lorsque sa température passe à 30°C .

On donne : $\alpha = 5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ et $\lambda = 7 \cdot 10^{-12} \text{ Pa}$; $1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$.

Exercice 2 (8 points)

Un calorimètre de capacité thermique $C = 150 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ contient une masse $m_1 = 200 \text{ g}$ d'eau à la température initiale $T_1 = 70^\circ\text{C}$. On y place un glaçon de masse $m_2 = 80 \text{ g}$ sortant du congélateur à la température $T_2 = -23^\circ\text{C}$.

Déterminer l'état d'équilibre final du système (température finale, masse des différents corps présents dans le calorimètre).

Données :

Chaleur massique de l'eau : $c_e = 4185 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;

Chaleur massique de la glace : $c_g = 2090 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;

Chaleur latente de fusion de la glace : $L_f = 3,34 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Exercice 3 (8 points)

Deux molécules monoatomiques de masses respectives m_1 et m_2 appartiennent à un mélange gazeux en équilibre à la température T .

1° Quelle est l'énergie cinétique moyenne de chaque type de molécule ?

2° En déduire le rapport des vitesses quadratiques moyennes de chaque molécule.

Application numérique : $M_1 = 4$ et $M_2 = 40$.

3° S'il y a N_1 molécules de masse m_1 et N_2 molécules de masse m_2 , calculer la pression exercée par le mélange gazeux en fonction de l'énergie moyenne par molécule.

Corrigé

Exercice 1

1° La différentielle dV du volume $V(T, P)$ du corps s'écrit :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP.$$

En utilisant les coefficients calorimétriques $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ et $\lambda = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$, on obtient :

$$dV = \alpha V dT - \lambda V dP.$$

2° Lorsque le volume reste constant, la relation précédente s'écrit :

$$dP = \frac{\alpha}{\lambda} dT.$$

En intégrant entre la température initiale T_1 et finale T_2 , il vient

$$P_2 - P_1 = \frac{\alpha}{\lambda} (T_2 - T_1),$$

soit

$$P_2 = P_1 + \frac{\alpha}{\lambda} (T_2 - T_1).$$

Application numérique :

$$P_2 = 10^5 + \frac{5 \cdot 10^{-5}}{7 \cdot 10^{-12}} (30 - 20) \approx 7,15 \cdot 10^7 \text{ Pa},$$

ou encore

$$P_2 = 715 \text{ atm}.$$

Exercice 2

Pour l'état final, trois cas peuvent se présenter :

- i) le glaçon est totalement fondu et la température finale est supérieure ou égale à 0°C ;
- ii) le glaçon est partiellement fondu, et à l'équilibre, il reste de l'eau et de la glace à 0°C ;
- iii) l'eau est complètement transformé en glace et la température finale est inférieure ou égale à 0°C .

Pour résoudre l'exercice, il faut supposer a priori un des cas précédents, faire des calculs correspondant à la situation choisie et vérifier que le résultat trouvé est bien en accord avec l'hypothèse. Si ce n'est pas le cas, il faut recommencer en choisissant un autre cas. Evidemment, il n'est pas interdit de choisir en premier la solution qui semble la plus plausible.

Supposons que l'état final corresponde au premier cas. Appelons T_f la température finale du système. La quantité de chaleur algébrique cédée par l'eau et le calorimètre est :

$$Q_1 = (m_1 c_e + C)(T_f - T_1).$$

Celle reçue par le glaçon se décompose en trois parties :

- échauffement du glaçon de T_2 à 0°C pendant lequel il reçoit une quantité de chaleur égale à $m_2 c_g (0 - T_2)$
- fusion du glaçon à 0°C ; il reçoit une quantité de chaleur égale à $m_2 L_f$
- échauffement de l'eau provenant de la fusion du glaçon de 0°C à T_f ; cette eau reçoit une quantité de chaleur égale à $m_2 c_e (T_f - 0)$.

D'où :

$$Q_2 = m_2 c_g (0 - T_2) + m_2 L_f + m_2 c_e (T_f - 0).$$

Le système formé par le calorimètre, l'eau et le glaçon étant isolé, on a :

$$Q_1 + Q_2 = 0,$$

soit

$$(m_1 c_e + C)(T_f - T_1) + m_2 c_g (0 - T_2) + m_2 L_f + m_2 c_e (T_f - 0).$$

On en déduit la température d'équilibre

$$T_f = \frac{(m_1 c_e + C)T_1 + m_2 c_g T_2 - m_2 L_f}{(m_1 + m_2) c_e + C}.$$

Application numérique :

$$T_f = \frac{(0,2 \times 4185 + 150) \times 70 + 0,08 \times 2090 \times (-23) - 0,08 \times 3,34 \cdot 10^5}{(0,2 + 0,08) \times 4185 + 150} \approx 29,15^\circ\text{C}$$

Cette valeur est bien compatible avec l'hypothèse de départ : l'état final correspond donc à 280 g d'eau liquide (car le glaçon a totalement fondue) à la température $29,15^\circ\text{C}$.

Exercice 3

1° Considérons une molécule de masse m_1 appartenant à la première espèce chimique du mélange gazeux. Son énergie cinétique est :

$$\langle E_{1c} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m_1 \langle v_1^2 \rangle,$$

avec $v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2$; ceci implique

$$\langle E_{1c} \rangle = \frac{1}{2} m_1 \langle v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2 \rangle = \frac{1}{2} m_1 \langle v_{1x}^2 \rangle + \frac{1}{2} m \langle v_{1y}^2 \rangle + \frac{1}{2} m \langle v_{1z}^2 \rangle.$$

Le théorème de l'équipartition de l'énergie permet d'attribuer l'énergie $\frac{1}{2} kT$ à chacun des termes s'exprimant sous une forme quadratique $\left(\frac{1}{2} m \langle v_{1x}^2 \rangle, \frac{1}{2} m \langle v_{1y}^2 \rangle \text{ et } \frac{1}{2} m \langle v_{1z}^2 \rangle \right)$.

Autrement dit, l'énergie cinétique "se répartit de manière égale" entre les différents degrés de liberté de la molécule (si l'on entend par degré de liberté une variable telle que v_{1x} dans notre démonstration). On obtient donc

$$\langle E_{1c} \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

L'énergie cinétique moyenne de la molécule ne dépend que de la température du gaz. On en déduit alors que la molécule de masse m_2 , appartenant à la deuxième espèce chimique du mélange gazeux, possède la même énergie cinétique moyenne que celle de la première espèce chimique. Donc

$$\langle E_{2c} \rangle = \langle E_{1c} \rangle = \langle E_c \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (1)$$

2° On définit la vitesse quadratique moyenne de la molécule de masse m_1 par

$$(v_{qm})_1 = \sqrt{\langle v_1^2 \rangle},$$

cette vitesse est déduite immédiatement de 1° à partir de la relation suivante :

$$\langle E_{1c} \rangle = \frac{1}{2} m_1 \langle v_1^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

$$\Rightarrow \langle v_1^2 \rangle = \frac{3kT}{m_1},$$

d'où

$$(v_{qm})_1 = \sqrt{\langle v_1^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_1}},$$

ou encore

$$(v_{qm})_1 = \sqrt{\frac{3kN}{m_1 N} T} = \sqrt{\frac{3RT}{M_1}},$$

où N est le nombre d'Avogadro.

En procédant de manière analogue, on obtient la vitesse quadratique moyenne de la molécule de masse m_2

$$(v_{qm})_2 = \sqrt{\frac{3kT}{m_2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_2}}.$$

Le rapport des deux vitesses quadratiques moyennes est alors :

$$\frac{(v_{qm})_1}{(v_{qm})_2} = \frac{\sqrt{\frac{3kT}{M_1}}}{\sqrt{\frac{3kT}{M_2}}} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}.$$

Application numérique :

$$\frac{(v_{qm})_1}{(v_{qm})_2} = \sqrt{\frac{40}{4}} = \sqrt{10}.$$

3° Si les N_1 molécules de l'un des deux gaz parfaits occupaient seules le volume V_1 , il en résulte une "pression partielle" P_1 donnée par l'équation d'état des gaz parfaits :

$$P_1 = \frac{N_1 kT}{V}.$$

De même pour les N_2 molécules, la "pression partielle" P_2 correspondante est :

$$P_2 = \frac{N_2 kT}{V}.$$

Quant à la pression totale P , c'est la somme des pressions partielles :

$$P = P_1 + P_2,$$

soit

$$P = \frac{N_1 kT}{V} + \frac{N_2 kT}{V} = \frac{(N_1 + N_2) kT}{V}. \quad (2)$$

Tirons le terme kT de l'équation (1) et remplaçons-le dans l'équation (2) ; il vient :

$$P = \frac{2(N_1 + N_2) \langle E_c \rangle}{3V}.$$