Première épreuve de moyenne durée

<u>Exercice 1</u> (12 points)

On considère un système constitué de N molécules de gaz parfait monoatomique en équilibre thermodynamique à la température T. Le gaz étudié est l'hélium de masse molaire $\mathrm{M} = 4\,g \cdot \mathrm{mol}^{-1}$.

1° Si $\mathrm{d}\Pi(v)$ représente la probabilité élémentaire pour une particule d'avoir un module de vitesse compris entre v et $v + \mathrm{d}v$, écrire sous forme d'une intégrale l'expression de la vitesse moyenne $\bar{v}$ et celle de la vitesse quadratique moyenne u des molécules du gaz.

2° La statistique de Maxwell-Boltzmann propose comme expression de la probabilité:

$$\mathrm{d}\Pi(v) = A(\mathrm{T}) \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k\mathrm{T}}\right) 4\pi v^2 \mathrm{d}v,$$

où m est la masse d'une molécule d'hélium et k la constante de Boltzmann.

a) Expliciter le raisonnement qui permet de calculer $A(\mathrm{T})$. Exprimer alors $A(\mathrm{T})$ en fonction de m et T.

b) Déterminer les expressions des vitesses $\bar{v}$ et u. Faire l'application numérique pour $\mathrm{T} = 300\,\mathrm{K}$.

3° L'énergie d'une molécule d'hélium vaut simplement $\mathrm{E} = \frac{1}{2} mv^2$.

a) Montrer, à partir de l'expression de $\mathrm{d}\Pi(v)$, que la probabilité de rencontrer une molécule dont l'énergie est comprise entre E et $\mathrm{E} + \mathrm{dE}$ est :

$$\mathrm{d}\Pi(\mathrm{E}) = B(\mathrm{T})\sqrt{\mathrm{E}}\exp\left(-\frac{\mathrm{E}}{k\mathrm{T}}\right)\mathrm{dE},$$

où $B(\mathrm{T})$ est une fonction de la température qu'on déterminera.

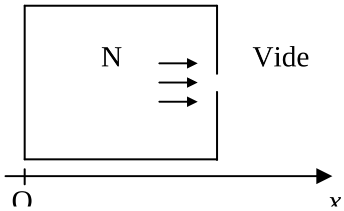
b) On donne $B(\mathrm{T}) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}\,(k\mathrm{T})^{3/2}}$. Déterminer l'énergie moyenne $\overline{\mathrm{E}}$ d'une molécule. Ce résultat était-il prévisible ?

c) Calculer, en électronvolt, la valeur de $\overline{\mathrm{E}}$ à la température de $300\,\mathrm{K}$.

On donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-ax^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\exp(-ax^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\exp(-ax^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3\exp(-ax^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a^2}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4\exp(-ax^2)\mathrm{d}x = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$; $R = 8{,}32\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$ et $\mathcal{N} = 6{,}02\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$.

Exercice 2 (8 points)

Un récipient de volume $V = 1\,\ell$, maintenu à température constante $T = 0^\circ C$ contient initialement de l'hélium sous la pression atmosphérique $P_0 = 1\,\text{atm}$. Une des parois de l'enceinte est percée à l'instant $t = 0$ d'un trou circulaire de rayon *r* qui provoque la fuite du gaz à l'extérieur où règne le vide. L'hélium sera considéré comme un gaz parfait dont les molécules ont la même masse *m*. On désignera par *n* le nombre de molécules par unité de volume.



1° Calculer le nombre initial N_0 de molécules dans l'enceinte.

2° Calculer la vitesse moyenne $\bar{v}$ des molécules dans l'enceinte.

3° On suppose que les molécules qui sortent par le trou ont une vitesse moyenne de sortie $\bar{v}_x = \frac{1}{4}\bar{v}$ suivant le sens positif de l'axe Ox. Calculer le nombre η d'atomes par unité de temps sortant par le trou en fonction de n, *r*, *m* et T.

4° Montrer que pour un rayon *r* donné, η est donné par

$$\eta = K(r)\frac{P}{\sqrt{mT}},$$

où P est la pression dans l'enceinte à l'instant t et $K(r)$ une fonction de *r* que l'on déterminera.

On donne : $R = 8{,}32\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$; $\mathcal{N} = 6{,}02\cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$; $M_{He} = 4\ g\cdot\text{mol}^{-1}$.

Corrigé

Exercice 1

1° La vitesse moyenne des molécules est donnée par

$$\bar{v} = \int_0^\infty v\, d\Pi(v)\,. \tag{1}$$

La valeur moyenne de $\overline{v^2}$ est donnée par

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2\, d\Pi(v)\,. \tag{2}$$

La vitesse quadratique moyenne est $u = \sqrt{\overline{v^2}}$.

2° a) En écrivant que la probabilité pour une particule d'avoir une vitesse de module compris entre 0 et l'infini est **égale à 1**, on obtient :

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}\Pi(v) = 1,$$

soit

$$A(\mathrm{T}) \cdot 4\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k\mathrm{T}}\right) v^2 \mathrm{d}v = 1.$$

En utilisant l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, avec $a = \frac{m}{2k\mathrm{T}}$, on obtient :

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k\mathrm{T}}\right) v^2 \mathrm{d}v = \frac{1}{4}\left(\frac{2k\mathrm{T}}{m}\right)\left(\frac{2\pi k\mathrm{T}}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2\pi k\mathrm{T}}{m}\right)^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$A(\mathrm{T}) \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2\pi k\mathrm{T}}{m}\right)^{\frac{3}{2}} = 1,$$

soit

$$A(\mathrm{T}) = \left(\frac{m}{2\pi k\mathrm{T}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

b) En remplaçant l'expression de la probabilité $\mathrm{d}\Pi(v)$ dans l'équation (1), on obtient :

$$\bar{v} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k\mathrm{T}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k\mathrm{T}}\right) v^3 \mathrm{d}v = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k\mathrm{T}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{2k\mathrm{T}}{m}\right)^2 = \sqrt{\frac{8k\mathrm{T}}{\pi m}},$$

ou encore

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k\mathrm{T}}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8k\mathcal{N}}{\pi m\mathcal{N}}} = \sqrt{\frac{8R\mathrm{T}}{\pi \mathrm{M}}}.$$

De même, en remplaçant $\mathrm{d}\Pi(v)$ dans (2), on obtient

$$\overline{v^2} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k\mathrm{T}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k\mathrm{T}}\right) v^4 \mathrm{d}v = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k\mathrm{T}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{8}\left(\frac{2k\mathrm{T}}{m}\right)^2\left(\frac{2\pi k\mathrm{T}}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3k\mathrm{T}}{m},$$

d'où la vitesse quadratique moyenne :

$$u = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k\mathrm{T}}{m}},$$

ou bien

$$u = \sqrt{\frac{3R\mathrm{T}}{\mathrm{M}}}.$$

Application numérique :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8\times 8{,}32\times 300}{\pi\times 4\cdot 10^{-3}}} \approx 1260\ \text{m/s} \qquad \text{et} \qquad u = \sqrt{\frac{3\times 8{,}32\times 300}{4\cdot 10^{-3}}} \approx 1360\ \text{m/s}.$$

3° a) On passe de $\mathrm{d}\Pi(v)$ à $\mathrm{d}\Pi(\mathrm{E})$ par le changement de variables suivant : $\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv^2$ et $\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}E}{mv}$; d'où

$$\mathrm{d}\Pi(\mathrm{E}) = \left(\frac{m}{2\pi k\mathrm{T}}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi\, v^2 \exp\left(-\frac{\mathrm{E}}{k\mathrm{T}}\right)\frac{\mathrm{dE}}{mv} = \frac{2}{\pi^{1/2}\,(k\mathrm{T})^{3/2}}\left(\frac{m^{1/2}v}{2^{1/2}}\right)\exp\left(-\frac{\mathrm{E}}{k\mathrm{T}}\right)\mathrm{dE},$$

ou encore

$$\mathrm{d}\Pi(\mathrm{E}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(k\mathrm{T})^{3/2}}\sqrt{\mathrm{E}}\,\exp\left(-\frac{\mathrm{E}}{k\mathrm{T}}\right)\mathrm{dE}.$$

On en déduit que $B(\mathrm{T}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(k\mathrm{T})^{3/2}}$.

b) L'énergie moyenne d'une molécule est donnée par :

$$\bar{\mathrm{E}} = \int_0^\infty \mathrm{E}\,\mathrm{d}\Pi(\mathrm{E}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(k\mathrm{T})^{3/2}}\int_0^\infty \mathrm{E}^{3/2}\exp\left(-\frac{\mathrm{E}}{k\mathrm{T}}\right)\mathrm{dE},$$

en faisant le changement de variable, $\mathrm{E} = x^2$, on peut écrire :

$$\int_0^\infty \mathrm{E}^{3/2}\exp\left(-\frac{\mathrm{E}}{k\mathrm{T}}\right)\mathrm{dE} = 2\int_0^\infty x^4\exp\left(-\frac{x^2}{k\mathrm{T}}\right)\mathrm{d}x = 2\times\frac{3\sqrt{\pi}}{8}(k\mathrm{T})^{5/2},$$

d'où

$$\bar{\mathrm{E}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(k\mathrm{T})^{3/2}}\times\frac{3\sqrt{\pi}}{4}(k\mathrm{T})^{5/2} = \frac{3}{2}k\mathrm{T}.$$

Ce résultat était prévisible puisque $\bar{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{3k\mathrm{T}}{m}\right) = \frac{3}{2}k\mathrm{T}$.

Remarque

L'hélium considéré comme un gaz parfait monoatomique possède 3 degrés de liberté de translation. Chaque degré de liberté correspond à une énergie cinétique moyenne $\frac{1}{2}k\mathrm{T}$; l'énergie cinétique moyenne d'un atome d'hélium est donc $\bar{\mathrm{E}} = \frac{3}{2}k\mathrm{T}$.

c) <u>Application numérique</u> :

$$\overline{E} = \frac{3}{2}k\mathrm{T} = \frac{3}{2}\frac{R}{\mathcal{N}}\mathrm{T} = \frac{3}{2}\times\frac{8{,}32}{6{,}02\cdot 10^{23}}\times 300 = 6{,}21\cdot 10^{-21}\,\mathrm{J}\,,$$

soit

$$\overline{\mathrm{E}} = \frac{6{,}21\cdot 10^{-21}}{1{,}6\cdot 10^{-19}} \approx 0{,}039\,\mathrm{eV}\,.$$

<u>Exercice 2</u>

1° L'équation d'état du gaz parfait s'écrit :

$$\mathrm{P_0 V} = \mathrm{N_0}k\mathrm{T}\,,$$

on en déduit

$$\mathrm{N_0} = \frac{\mathrm{P_0 V}}{k\,\mathrm{T}}\,.$$

<u>Application numérique</u> :

La constante de Boltzmann vaut : $k = \frac{R}{\mathcal{N}} = \frac{8{,}32}{6{,}02\cdot 10^{23}} = 1{,}38\cdot 10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$; d'où

$$\mathrm{N_0} = \frac{10^5\times 10^{-3}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\times 273} = 2{,}65\cdot 10^{22}\ \text{molécules.}$$

2° La vitesse moyenne des molécules est donnée par

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8k\mathrm{T}}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8R\mathrm{T}}{\pi \mathrm{M}}} \approx 1202\,\mathrm{m/s}$$

3° Le nombre de molécules qui **sortent pendant dt** sont contenues dans un cylindre de base la section circulaire s du trou et de longueur $\mathrm{d}x = \overline{v}_x\mathrm{dt}$:

$$\alpha = \frac{\mathrm{N(t)}}{\mathrm{V}}\times s\overline{v}_x\mathrm{dt} = ns\overline{v}_x\mathrm{dt}\,.$$

Pour obtenir le nombre η de molécules qui sortent par unité de temps, il suffit de diviser le nombre α par dt, soit

$$\eta = ns\overline{v}_x\,,$$

or $s = \pi\, r^2$ et $\overline{v}_x = \frac{1}{4}\overline{v} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8k\mathrm{T}}{\pi m}}$, d'où

$$\eta = n\, r^2\sqrt{\frac{\pi k\mathrm{T}}{2m}}\,. \qquad (1)$$

4° Ecrivons l'équation d'état du gaz parfait et calculons la densité n des molécules :

$$\mathrm{PV} = \mathrm{N}k\mathrm{T} \Rightarrow n = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{P}}{k\mathrm{T}}\,.$$

En remplaçant n dans l'équation (1), on obtient :

$$\eta = \frac{\mathrm{P}r^2}{k\mathrm{T}}\sqrt{\frac{\pi k\mathrm{T}}{2m}}\,,$$

ou encore

$$\eta = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\,r^2\right)\frac{\mathrm{P}}{\sqrt{m\mathrm{T}}}\,,$$

d'où

$$\mathrm{K}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}\,r^2\,.$$