Première épreuve de moyenne durée

<u>Exercice 1</u> (12 points)

L'air est composé de $\frac{1}{5}$ de molécules de dioxygène ($M_{O_2} = 32\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$) et de $\frac{4}{5}$ de molécules de diazote ($M_{N_2} = 28\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$).

1° Calculer la masse molaire moyenne M de l'air.

2° En déduire la masse volumique ρ_0 au niveau du sol, où la pression est $P_0 = 10^5$ Pa et la température $T_0 = 27\,°\mathrm{C}$. On considère que l'air suit la loi des gaz parfaits et on prend $R = 8{,}32\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.

3° On suppose en première approximation que la température de l'atmosphère est indépendante de l'altitude. Montrer que la pression varie avec l'altitude suivant la loi :

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right).$$

4° A quelle altitude h la pression est-elle égale à P_0/e ? On prendra $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

5° Déduire des deux questions précédentes la loi de variation de la masse volumique $\rho(z)$ en fonction de l'altitude z. On suppose toujours $T = T_0 = \text{constante}$.

6° Calculer la masse volumique $\rho(z)$ de l'air à l'altitude 10 km.

<u>Exercice 2</u> (8 points)

I) Soit un gaz parfait monoatomique de masse atomique M à la température T.

1° Donner l'énergie cinétique moyenne d'un atome $\overline{E}_c$ de ce gaz en fonction de la température T.

2° En déduire l'expression de la vitesse quadratique moyenne $u = \sqrt{\overline{v^2}}$ d'un atome.

3° Application numérique : calculer la vitesse quadratique moyenne d'un atome d'hélium. On donne : $T = 47\,°\mathrm{C}$; $M = 4\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$; $R = 8{,}32\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ et $\mathcal{N} = 6{,}02\cdot 10^{23}$.

4° La théorie cinétique montre que la pression exercée par les molécules du gaz sur la paroi est donnée par $P = \frac{1}{3}\nu m\overline{v^2}$, où ν est la densité moléculaire. Calculer cette pression en fonction de $\overline{E}_c$.

II) On considère maintenant un mélange de deux gaz parfaits monoatomiques de masses atomiques M_1 et M_2 contenus dans un volume V à la température T. On désigne par

– N_1 et N_2 les nombres de molécules contenus dans chacun des gaz.
– m_1 et m_2 les masses de chaque type de molécule.
– ν_1 et ν_2 leurs densités moléculaires.

1° Quelle relation existe-t-il entre les énergies cinétiques moyennes de chaque type de molécule ?
2° Calculer la pression exercée par les molécules du mélange gazeux sur la paroi. Conclusion ?

Corrigé

Exercice 1

1° La masse molaire de l'air se calcule à partir des masses molaires de l'azote et de l'oxygène :

$$\mathrm{M} = \frac{1}{5}\mathrm{M}_{\mathrm{O}_2} + \frac{4}{5}\mathrm{M}_{\mathrm{N}_2} .$$

Application numérique :

$$\mathrm{M} = \frac{1}{5}\times 32 + \frac{4}{5}\times 28 = 28{,}8 \text{ g} .$$

2° l'air étant considéré comme un gaz parfait, son équation d'état s'écrit : $\mathrm{PV} = nR\mathrm{T}_0$. Or $n = \frac{m}{\mathrm{V}}$, donc

$$\mathrm{PV} = \frac{m}{\mathrm{M}}R\mathrm{T}_0 \Rightarrow \rho = \frac{m}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{PM}}{R\mathrm{T}_0} . \qquad (1)$$

A l'altitude $z = 0$, la masse volumique s'écrit :

$$\rho_0 = \frac{\mathrm{P}_0\mathrm{M}}{R\mathrm{T}_0} .$$

Application numérique :

$$\rho_0 = \frac{10^5 \times 28{,}8\times 10^{-3}}{8{,}32\times 300} \approx 1{,}153 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} .$$

3° Ecrivons l'équation de l'équilibre hydrostatique (l'axe Oz étant dirigé vers le haut):

$$\mathrm{dP} = -\rho g \mathrm{d}z \;;$$

En reportant l'expression de ρ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\mathrm{dP} = -\frac{\mathrm{PM}}{R\mathrm{T}_0} g\mathrm{d}z . \qquad (2)$$

Intégrons l'équation (2) entre $z = 0$ et z ; il vient :

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0}\int_0^z dz\,,$$

d'où la loi de variation de la pression avec l'altitude z :

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right). \tag{3}$$

Remarque
Cette formule n'est évidemment pas applicable pour l'atmosphère dans son ensemble, mais elle est applicable localement, dans la mesure où l'on peut considérer que la température est uniforme. Un modèle plus réaliste prenant en compte la lente décroissance de la température avec l'altitude dans la basse atmosphère (région de l'atmosphère terrestre inférieure à 10 km et appelée troposphère) correspondait à une évolution polytropique (voir sujet A page 9).

4° Calculons l'altitude h à laquelle la pression P_0 est divisé par e (base du logarithme népérien) :

$$\frac{P_0}{e} = P_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT_0}\right) \Rightarrow h = \frac{RT_0}{Mg}.$$

Application numérique :

$$h = \frac{8{,}32\times 300}{28{,}8\times 10^{-3}\times 9{,}8} \approx 8843\,\text{m}.$$

Remarque
En exprimant la pression sous la forme $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{h}\right)$, on peut remarquer que pour des variations de z très petites devant h, la pression pourra être considérée comme uniforme. Par exemple pour z = 10 m, on trouve $P = 0{,}9988\,P_0$.

5° En reportant l'expression (3) de la pression dans l'équation (1), on obtient :

$$\rho = \frac{PM}{RT_0} = \frac{P_0 M}{RT_0}\exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) = \rho_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right),$$

ou encore

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{h}\right).$$

6° A 10 km d'altitude, la masse volumique vaut :

$$\rho(10\,\text{km}) = 1{,}153\times \exp\left(-\frac{10}{8{,}843}\right) \approx 0{,}372\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

Exercice 2

1° Pour un gaz parfait monoatomique, un atome possède 3 degrés de liberté : les trois directions de l'espace suivant lesquelles il peut se déplacer. Statistiquement pour chaque atome, un degré de liberté va nécessiter l'énergie $\frac{1}{2}k\mathrm{T}$. Ainsi, l'énergie cinétique moyenne d'un atome est :

$$\overline{\mathrm{E}}_c = \frac{3}{2}k\mathrm{T}. \qquad (1)$$

2° Comme les atomes du gaz sont supposés ponctuelles, seule l'énergie cinétique microscopique de translation est à prendre en compte :

$$\overline{\mathrm{E}}_c = \frac{1}{2}m\overline{v^2},$$

et en tenant compte de l'équation (1), on peut écrire :

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k\mathrm{T} \Rightarrow \overline{v^2} = \frac{3k\mathrm{T}}{m},$$

d'où

$$u = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k\mathrm{T}}{m}} = \sqrt{\frac{3R\mathrm{T}}{\mathrm{M}}}.$$

3°

$$u = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3R\mathrm{T}}{\mathrm{M}}} = \sqrt{\frac{3\times 8{,}32\times 320}{4\times 10^{-3}}} \approx 1413\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

4° On peut exprimer facilement la pression en fonction de $\overline{\mathrm{E}}_c$:

$$\mathrm{P} = \frac{1}{3}\nu m\overline{v^2} = \frac{2}{3}\nu\left(\frac{m\overline{v^2}}{2}\right) = \frac{2}{3}\nu\overline{\mathrm{E}}_c.$$

II) 1° Puisque l'énergie cinétique moyenne d'un atome ne dépend que de la température T, on a

$$\overline{\mathrm{E}}_{c1} = \overline{\mathrm{E}}_{c2} = \frac{3}{2}k\mathrm{T}.$$

2° La pression exercée par le mélange gazeux s'écrit :

$$\mathrm{P} = \frac{2}{3}(\nu_1+\nu_2)\overline{\mathrm{E}}_c = \frac{2}{3}\nu_1\overline{\mathrm{E}}_c + \frac{2}{3}\nu_2\overline{\mathrm{E}}_c.$$

<u>Conclusion :</u>

La pression exercée par toutes les molécules sur la paroi est égale à la somme des pressions partielles exercées par chaque type de molécule sur la paroi.