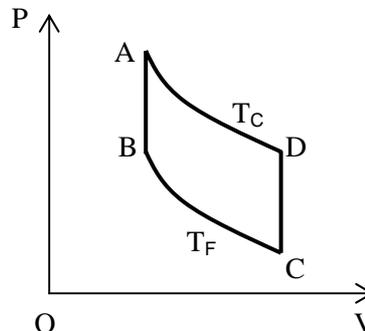


## Deuxième épreuve de moyenne durée

**Exercice 1 (12 points)**

On considère un gaz parfait décrivant un cycle constitué de deux isochores AB et CD et de deux isothermes BC et DA de températures respectives  $T_F$  et  $T_C$  (figure ci-contre).



1° Dans quel sens doit-on parcourir le cycle pour qu'il soit moteur ?

2° Montrer que la chaleur échangée lors de la transformation isochore AB est restituée lors de la transformation isochore CD.

3° Calculer le travail échangé avec l'extérieur lors du cycle moteur.

4° Calculer le rendement en fonction de  $T_F$  et  $T_C$ .

5° Quelles sont les deux manières possibles d'améliorer le rendement de ce cycle ? Quelle est la manière la plus efficace ?

**Exercice 2 (8 points)**

Une mole de gaz de Van Der Waals d'équation d'état  $(P + a/V^2)(V - b) = RT$ , voit son volume passer de  $V_1$  à  $V_2$  au cours de d'une transformation isotherme réversible.

1° Calculer le travail échangé avec l'extérieur.

2° Comparer le résultat obtenu avec celui du gaz parfait.

3° L'équation d'une adiabatique pour un gaz parfait s'écrit  $PV^\gamma = \text{Constante}$ . Quelle est l'analogue de cette équation pour un gaz de Van Der Waals ?

On supposera que pour un gaz de Van Der Waals :  $R/C_v \approx \gamma - 1$ .

## Corrigé

**Exercice 1**

1° Lorsque le gaz décrit un cycle moteur, il doit fournir du travail  $W$  à l'extérieur. Donc  $W < 0$ . Par conséquent le cycle doit être parcouru dans le sens horaire ; c'est-à-dire le sens ADBCA.

2° Transformation isochore BA :

Appliquons le 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique :  $dU = \delta Q + \delta W$ ,

et puisque  $\delta W = -P dV = 0$  (car le volume est constant), on obtient :  $dU = \delta Q$ .

La variation d'énergie interne de  $n$  moles de gaz parfait, de capacité calorifique molaire  $C_v$ , lors d'une variation de température  $dT$ , est

$$dU = n C_v dT.$$

Donc,

$$\delta Q = n C_v dT$$

$$\Rightarrow Q_{BA} = \int_{T_B}^{T_A} n C_v dT = n C_v (T_A - T_B).$$

Les points A et B appartenant respectivement aux isothermes de températures  $T_C$  et  $T_F$ , on peut écrire  $T_A = T_C$  et  $T_B = T_F$ .

D'où

$$Q_{BA} = n C_v (T_C - T_F).$$

Puisque  $T_C > T_F$ , alors  $Q_{BA} > 0$ ; le gaz reçoit quantité de chaleur  $Q_{BA}$  de la part du milieu extérieur.

Transformation isochore DC :

Comme pour la transformation isochore BA, la quantité de chaleur  $\delta Q$  échangée avec l'extérieur au cours d'une transformation élémentaire s'écrit :

$$\delta Q = n C_v dT$$

$$\Rightarrow Q_{DC} = \int_{T_D}^{T_C} n C_v dT = n C_v (T_C - T_D).$$

Les points C et D appartenant respectivement aux isothermes de températures  $T_F$  et  $T_C$ , on peut écrire  $T_C = T_F$  et  $T_D = T_C$ .

D'où

$$Q_{DC} = n C_v (T_F - T_C).$$

Puisque  $Q_{DC} = -Q_{BA} < 0$ , le gaz restitue une quantité de chaleur  $Q_{DC}$  au milieu extérieur.

3° Transformations isochores BA et DC :

Le volume étant constant, le travail est nul :  $W_{BA} = W_{DC} = 0$ .

Transformation isotherme AD :

La transformation étant réversible, on a  $\delta W = -PdV$ . L'équation d'état du gaz parfait étant  $PV = nRT_C$ , on en déduit :

$$\delta W = -n R T_C \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow W_{AD} = -n R T_C \int_{V_A}^{V_D} \frac{dV}{V} = -n R T_C \ln \left( \frac{V_D}{V_A} \right).$$

Transformation isotherme CB :

Le travail élémentaire  $\delta W$  échangée avec le milieu extérieur au cours de la transformation isotherme CB de température  $T_F$  est :

$$\delta W = -n R T_F \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow W_{CB} = -n R T_F \int_{V_C}^{V_B} \frac{dV}{V} = -n R T_F \ln\left(\frac{V_B}{V_C}\right).$$

Or,  
d'où

$$V_B = V_A \text{ et } V_C = V_D,$$

$$W_{CB} = -n R T_F \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right).$$

Le travail  $W$  fourni au milieu extérieur au cours du cycle est la somme des travaux échangés au cours des deux isothermes AD et CB. On a donc

$$W = W_{AD} + W_{CB} = -n R (T_C - T_F) \ln\left(\frac{V_D}{V_A}\right).$$

4° Au cours de la transformation isotherme AD, le gaz reçoit de la part de la source chaude la quantité de chaleur  $Q_{AD}$  telle que

$$Q_{AD} = -W_{AD} = n R T_C \ln\left(\frac{V_D}{V_A}\right).$$

Le rendement  $\rho$  du cycle est défini positivement par :

$$\rho = \left| \frac{W}{Q_{AD}} \right| = \frac{-W}{Q_{AD}}$$

soit

$$\rho = \frac{n R (T_C - T_F) \ln\left(\frac{V_D}{V_A}\right)}{n R T_C \ln\left(\frac{V_D}{V_A}\right)} = 1 - \frac{T_F}{T_C}.$$

5° On peut améliorer le rendement du cycle de deux manières possibles :

- i) on garde la température de la source chaude  $T_C$  constante et on diminue celle de la source froide  $T_F$ .
- ii) on garde la température de la source froide  $T_F$  constante et on augmente celle de la source chaude  $T_C$ .

Cherchons maintenant la manière la plus efficace d'obtenir le meilleur rendement.

**Cas i) :**

Puisque  $T_C$  est constant, la différentielle de  $\rho$  est :  $d\rho = -\frac{dT_F}{T_C}$ .

Comme  $T_F$  diminue  $\Rightarrow dT_F < 0$ . On pose alors  $dT_F = -dT$ .

D'où

$$d\rho = \frac{dT}{T_C}.$$

Cela signifie que si la température de la source froide diminue de  $dT$ , le rendement  $\rho$  augmente de  $\frac{dT}{T_C}$ .

**Cas ii)** : (on notera le rendement  $\rho'$ )

$T_F$  étant constant, on a :  $d\rho' = \frac{T_F dT_C}{T_C^2}$ . En posant  $dT_C = dT$  puisque  $T_C$  augmente, on

obtient :

$$d\rho' = \frac{T_F dT}{T_C^2}.$$

Donc, lorsque la température  $T_C$  augmente de  $dT$ , le rendement augmente de  $\frac{T_F dT}{T_C^2}$ .

Pour savoir laquelle des deux manières est la plus efficace, on fait le rapport des deux rendements calculés dans les deux cas :

$$\frac{d\rho}{d\rho'} = \frac{T}{T}.$$

Puisque  $T_C > T_F$ , alors  $d\rho > d\rho'$ . Donc, la manière la plus efficace est celle décrite en i).

## Exercice 2

1° Le travail reçu par le gaz, au cours de la transformation élémentaire réversible, est

$$\delta W = -P dV,$$

Or, on a

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}.$$

On en déduit

$$\delta W = -\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) dV.$$

Le travail reçu au cours d'une transformation isotherme est alors

$$W = \int_{V_1}^{V_2} -\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) dV = -RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V-b} + a \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2},$$

$$\Rightarrow W = RT \ln \frac{V_1 - b}{V_2 - b} + a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right),$$

ou encore

$$W = R T \ln \frac{V_1}{V_2} \frac{1 - \frac{b}{V_1}}{1 - \frac{b}{V_2}} + a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

2° Si le gaz était parfait, on aurait  $a = b = 0$  et le travail isotherme serait alors

$$W' = R T \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

Pour comparer les travaux des deux gaz, on calcule leur différence

$$W - W' = R T \ln \left( 1 - \frac{b}{V_1} \right) - R T \ln \left( 1 - \frac{b}{V_2} \right) + a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

En supposant le covolume  $b$  très petit devant le volume du gaz, on peut écrire :

$$\ln \left( 1 - \frac{b}{V_1} \right) \approx -\frac{b}{V_1} \quad \text{et} \quad \ln \left( 1 - \frac{b}{V_2} \right) \approx -\frac{b}{V_2},$$

d'où

$$W - W' = (R T b - a) \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

Si le gaz subit une compression (resp détente) isotherme, on a :

$V_2 < V_1$  (resp  $V_2 > V_1$ )  $\Rightarrow \frac{1}{V_2} > \frac{1}{V_1}$  (resp  $\frac{1}{V_2} < \frac{1}{V_1}$ ). Ainsi, le signe de  $W - W'$  est relié à

Celui de  $(R T b - a)$  (resp  $(a - R T b)$ ) :

$$* \text{ si } T > \frac{a}{R b} \left( \text{resp } T < \frac{a}{R b} \right) \Rightarrow W > W',$$

$$* \text{ si } T < \frac{a}{R b} \left( \text{resp } T > \frac{a}{R b} \right) \Rightarrow W < W',$$

$$* \text{ si } T = \frac{a}{R b} \Rightarrow W = W'.$$

3° Dans une transformation élémentaire réversible, la quantité de chaleur échangée, entre une mole de gaz et le milieu extérieur, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\delta Q = C_v dT + \ell dV.$$

En exprimant les différentielles des fonctions énergie interne et entropie, on montre que :

$$\ell = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V .$$

Or,

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \Rightarrow \ell = \frac{RT}{V-b} .$$

En remplaçant  $\ell$  dans l'expression de  $\delta Q$ , on obtient :

$$\delta Q = C_v dT + \frac{RT}{V-b} dV .$$

Pour une transformation adiabatique, on a :

$$\delta Q = C_v dT + \frac{RT}{V-b} dV = 0 \Rightarrow \int \frac{dT}{T} + \frac{R}{C_v} \int \frac{dV}{V-b} = \text{Constante} ,$$

soit

$$T \cdot (V-b)^{\gamma-1} = \text{Constante} .$$

En éliminant la température à l'aide de l'équation d'état  $(P + a/V^2)(V-b) = RT$ , on obtient :

$$(P + a/V^2) \cdot (V-b)^{\gamma} = \text{Constante} .$$