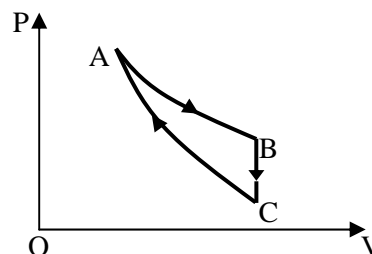


Epreuve de rattrapage

Exercice 1 (9 points)

On étudie un cycle composé d'une isotherme AB, d'une isochore BC, et d'une adiabatique CA, parcouru par une masse $m = 1\text{ g}$ d'air dans le sens ABCA (figure ci-contre). Toutes ces transformations sont réalisées de manière réversible. On assimile l'air à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\text{ g}$ et dont le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant vaut $\gamma = 1,4$.



Les coordonnées du point A sont ($P_A = 10\text{ atm}$, $V_A = 0,08\text{ l}$, T_A).

Le rapport entre les pressions maximale et minimale est $P_A/P_C = 10$.

1° Le cycle ABCA est-il moteur ou récepteur ? Justifier la réponse.

2° Déterminer la température T_A au point A ainsi que les coordonnées (P_B, V_B, T_B) et (P_C, V_C, T_C) des points B et C respectivement.

3° Calculer les travaux échangés avec l'extérieur au cours de chacune des transformations AB, BC et CA.

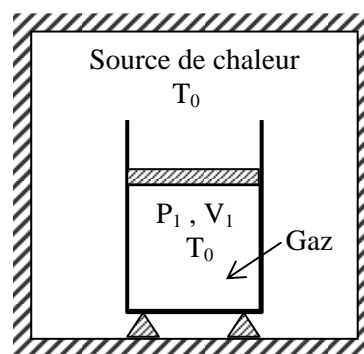
4° Calculer les quantités de chaleur échangées avec l'extérieur au cours de chacune des transformations AB, BC et CA.

5° En déduire le travail total W et la quantité de chaleur totale Q reçus au cours du cycle. Le premier principe, appliqué au cycle ABCA, est-il vérifié ?

6° Est-il possible de décrire le cycle ABCA à l'aide d'une seule source de chaleur dont la température est celle de l'isotherme AB ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (6 points)

Nous proposons de comparer deux détentes monothermes (le système interagit avec une seule source de chaleur), l'une réversible, et l'autre irréversible. Le système étudié est constitué de n moles d'un gaz parfait enfermé dans un récipient par un piston. Le gaz, dont l'état initial noté (P_1, V_1, T_0), est en contact thermique avec une source de chaleur de température T_0 (figure ci-contre). L'ensemble gaz-source est isolé.



Etat initial

1° On étudie d'abord une détente réversible qui fait passer le gaz de l'état initial de volume V_1 à l'état final de volume V_2 .

a) Montrer que l'on obtient :

$$W_{rev} = -Q_{rev} = -nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

b) Calculer la variation d'entropie du système et celle de la source.

c) Quelle relation exprime le second principe de la thermodynamique.

2° On considère maintenant une situation où le gaz, toujours en contact thermique avec la source de chaleur, se détend de manière irréversible contre un milieu extérieur de pression fixée à P_{ext} . Cette pression est donc également la pression finale du système à la fin de la détente. Le volume initial et final sont toujours égaux à V_1 et V_2 .

a) Donner l'expression de P_{ext} .

b) Montrer que

$$W = -Q = -nRT_0 \left(1 - \frac{V_1}{V_2} \right).$$

c) Calculer les variations d'entropie du gaz, de la source et de l'ensemble.

d) Que prévoit le second principe de la thermodynamique ? En déduire que $Q_{\text{rev}} > Q$.

QCM

(5 pts)

1° Lors d'un cycle, la variation de l'énergie interne d'un gaz parfait dépend de

- ☐ la nature des transformations
- ☐ la température initiale et de la température finale
- ☐ la capacité calorifique à volume constant du gaz
- ☐ d'aucun paramètre

2° Lors d'un processus isotherme, l'enthalpie H d'un gaz parfait

- ☐ augmente
- ☐ reste constante
- ☐ diminue

3° Lors d'un processus irréversible, l'entropie d'un système isolé

- ☐ augmente
- ☐ reste constante
- ☐ diminue

4° Pour un système qui subit une transformation adiabatique, la fonction d'état jouant le rôle de potentiel thermodynamique est

- ☐ l'enthalpie
- ☐ l'énergie interne
- ☐ l'entropie
- ☐ l'énergie libre

5° Le parcours d'un cycle moteur doit être

- ☐ dans le sens trigonométrique
- ☐ dans le sens horaire
- ☐ quelconque

Corrigé

Exercice 1

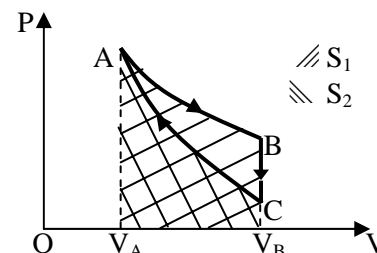
1° - Le travail échangé lors de la détente isotherme AB est négatif (car $dV > 0$) ; il représente l'opposé de l'aire S_1 (hachurée sur le diagramme à l'aide du motif //) délimitée par les deux droites verticales V_A et V_B et située sous la courbe AB.

- De la même manière, le travail (positif cette fois car $dV < 0$) échangé lors de la compression adiabatique CA, est représenté par l'aire S_2 (hachurée sur le diagramme à l'aide du motif \\\) délimitée par les deux verticales V_A et V_B et située sous la courbe CA.

- Enfin, au cours de la transformation isochore BC ($dV = 0$), il n'y a aucun travail mis en jeu ; l'aire qui lui est associée est donc nulle.

Il en résulte que le travail total au cours du cycle est donné par $W = S_2 - S_1$; ici $W < 0$ car $S_2 < S_1$.

Le cycle ABCA est donc **moteur**.



2°

• Température au point A

A l'état initial, l'équation d'état des gaz parfaits permet d'écrire :

$$P_A V_A = n R T_A ;$$

or le nombre de moles du gaz est $n = \frac{m}{M} = \frac{1}{29}$; la température T_A est donc

$$T_A = \frac{M P_A V_A}{m R} .$$

Application numérique :

$$T_A = \frac{29 \times 10 \cdot 10^5 \times 8 \cdot 10^{-5}}{8,32} = 278,8 \text{ K} .$$

• Coordonnées du point C

Le rapport $\frac{P_A}{P_C} = 10$ donne immédiatement la pression minimale P_C :

$$P_C = \frac{P_A}{10} = \frac{10}{10} = 1 \text{ atm} .$$

Puisque la transformation CA est une adiabatique réversible, l'équation de Laplace permet d'écrire :

$$P_A V_A^\gamma = P_C V_C^\gamma \Rightarrow V_C = V_A \left(\frac{P_A}{P_C} \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (1)$$

Application numérique :

$$V_C = 0,08 \times 10^{1/1,4} = 0,41 \ell.$$

En utilisant l'équation de Laplace relative aux variables T et P, on peut écrire :

$$T_A P_A^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_C P_C^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow T_C = T_A \left(\frac{P_A}{P_C} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

Application numérique :

$$T_C = 278,8 \times 10^{-0,4/1,4} = 144,4 \text{ K}.$$

• Coordonnées du point B

La transformation AB est isotherme :

$$T_B = T_A = 278,8 \text{ K},$$

tandis que la transformation BC est isochore :

$$V_B = V_C = 0,41 \ell.$$

La loi de Mariotte, appliquée à l'isotherme AB, donne :

$$P_A V_A = P_B V_C \Rightarrow P_B = P_A \frac{V_A}{V_C} \quad (\text{car } V_B = V_C),$$

et en tenant compte de la relation (1), on obtient :

$$P_B = P_A \left(\frac{P_A}{P_C} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

Application numérique :

$$P_B = 10 \times 10^{-\frac{1}{1,4}} = 1,93 \text{ atm}.$$

3° Calculons le travail échangé par le gaz avec le milieu extérieur au cours de chaque transformation :

• Transformation AB

Le gaz subit une transformation réversible : à chaque instant, il est dans un état de quasi-équilibre thermodynamique interne ; on a :

$$\delta W = -P_{ext} dV = -P dV. \quad (2)$$

Compte tenu de l'équation d'état du gaz parfait, $P = \frac{nRT_A}{V}$, l'équation (2) devient :

$$\delta W = -nRT_A \frac{dV}{V}.$$

En intégrant, on obtient le travail total échangé au cours de l'isotherme AB :

$$W_{AB} = -nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_B}.$$

Application numérique :

$$W_{AB} = \frac{1}{29} \times 8,32 \times 278,8 \times \ln \frac{0,08}{0,41} \approx -130,7 \text{ J}.$$

• Transformation BC

Au cours du refroidissement isochore BC, le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W = -P dV = 0 \quad (\text{car } dV = 0) ;$$

il n'y a donc aucun échange de travail avec le milieu extérieur : $W_{BC} = 0$.

• Transformation CA

D'après le premier principe, la variation élémentaire d'énergie interne s'écrit :

$$dU = \delta W + \delta Q,$$

et puisque $\delta Q = 0$, alors

$$\delta W = dU. \quad (3)$$

Or, pour un gaz parfait de capacités thermiques constantes, on a :

$$dU = nC_v dT = n \frac{R}{\gamma - 1} dT ;$$

on en déduit compte tenu de (3) et après intégration :

$$W_{CA} = n \frac{R}{\gamma - 1} \int_{T_C}^{T_A} dT = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_A - T_C).$$

Application numérique :

$$W_{CA} = \frac{1}{29} \times \frac{8,32}{1,4 - 1} (278,8 - 144,4) \approx 96,4 \text{ J}.$$

4°

• Le long de l'isotherme AB, l'énergie interne du gaz ne varie pas :

$$dU = \delta W + \delta Q = 0,$$

soit, après intégration

$$Q_{AB} = -W_{AB} = 130,7 \text{ J}.$$

- Le long de l'isochore BC, la variation d'énergie interne du gaz parfait est, au cours d'une transformation élémentaire :

$$dU = \delta Q = nC_v dT \quad (\text{car } \delta W = 0),$$

or, la capacité calorifique molaire est $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$, donc

$$\delta Q = n \frac{R}{\gamma - 1} dT.$$

Par intégration, on obtient :

$$Q_{BC} = n \frac{R}{\gamma - 1} \int_{T_B}^{T_C} dT = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_C - T_B).$$

Application numérique :

$$Q_{BC} = \frac{1}{29} \times \frac{8,32}{1,4 - 1} (144,4 - 278,8) \approx -96,4 \text{ J}.$$

- Le long de l'adiabatique CA, il n'y a aucun échange de chaleur avec l'extérieur : $Q_{CA} = 0$.

5° Au cours du cycle, le travail total échangé est :

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA},$$

ou

$$W = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_B} + n \frac{R}{\gamma - 1} (T_A - T_C).$$

Application numérique :

$$W = -130,7 + 96,4 = -34,3 \text{ J}.$$

La quantité de chaleur totale échangée est :

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA},$$

soit

$$Q = -nRT_A \ln \frac{V_A}{V_B} + n \frac{R}{\gamma - 1} (T_C - T_B).$$

Application numérique :

$$Q = 130,7 - 96,4 = 34,3 \text{ J}.$$

D'après le premier principe, La variation d'énergie interne au cours du cycle est :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = W + Q = 0,$$

ce qui vérifie le premier principe car l'énergie interne d'un gaz parfait ne varie pas au cours d'un cycle.

6° Dans le cas d'un cycle moteur monotherme ABCA, (c'est-à-dire ne fonctionnant qu'avec une seule source de chaleur à la température T_A), le premier principe mène à la relation suivante :

$$\Delta U_{cycle} = W + Q_{AB} = 0,$$

soit

$$W = -Q_{AB}.$$

Par ailleurs, le second principe permet d'écrire :

$$\Delta S_{univers} = \Delta S_{gaz} + \Delta S_{source} = 0 + \frac{-Q_{AB}}{T_A} \geq 0,$$

ou encore

$$\frac{Q_{AB}}{T_A} \leq 0, \quad (\text{inégalité de Clausius})$$

où l'égalité correspond au cas limite du fonctionnement réversible.

On en déduit que $Q_{AB} \leq 0$, et d'après la relation (4), $W \geq 0$.

Il est donc impossible de réaliser un cycle moteur ABCA fonctionnant par contact avec une seule source de chaleur.

Remarques

- Posons $S_1 = S_1' + S_1''$, où S_1' désigne la partie de l'aire S_1 située sous la courbe CA, et S_1'' l'autre partie de S_1 qui représente aussi l'aire du cycle ABCA. On a donc :

$$W = S_2 - (S_1' + S_1'') = (S_2 - S_1') - S_1'',$$

or $S_2 - S_1' = 0$ (cela signifie que l'aire S_2 est éliminée par la partie de l'aire S_1 située sous la courbe CA ; c'est ce que montre le diagramme (P,V) sur la partie de l'aire hachurée deux fois à l'aide de deux motifs différents), donc $W = -S_1''$.

Ainsi, le travail échangé représente l'opposé de l'aire du cycle ABCA. Comme l'aire S_1'' est comptée positivement, on a $W < 0$. Donc le cycle est **moteur**.

- Ce résultat était prévisible car le cycle ABCA étant décrit dans le sens horaire, il est moteur. Lorsqu'il est décrit dans le sens trigonométrique (sens contraire des aiguilles d'un montre), il est récepteur.

- On pouvait calculer la température T_C en utilisant l'équation d'état du gaz parfait :

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR}.$$

- La formule classique $\delta W = -PdV$ permet aussi d'obtenir le travail échangé lors de la transformation CA. Il suffit de tenir compte de l'équation Laplace, $PV^\gamma = Cste$ (où C est une constante), et calculer le travail total à l'aide de l'intégrale suivante :

$$W = -Cste \int_{V_C}^{V_A} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{Cste}{\gamma-1} (V_A^{1-\gamma} - V_C^{1-\gamma}),$$

et comme $P_A V_A^\gamma = P_C V_C^\gamma = Cste$, on retrouve effectivement

$$W = \frac{P_A V_A - P_C V_C}{\gamma - 1} = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_A - T_C).$$

Exercice 2

1°

a) Le travail échangé par le gaz, au cours d'une transformation élémentaire, s'écrit :

$$\delta W = -P_{\text{ext}} dV.$$

Dans le cas d'une transformation réversible, on a $P_{\text{ext}} = P$, où P est la pression du gaz définie à chaque instant de la transformation. Il vient :

$$\delta W = -P dV.$$

De plus la transformation est isotherme, $T_{\text{gaz}} = T_0$ à chaque instant. Cela se traduit par l'équation d'état $P = \frac{nRT_0}{V}$. On obtient donc :

$$\delta W = -\frac{nRT_0}{V} dV. \quad (1)$$

Le travail total échangé par le gaz, lorsque le volume passe de V_1 à V_2 , est donc :

$$W_{\text{rev}} = -nRT_0 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Lors d'une transformation isotherme, la variation d'énergie interne du gaz parfait est nulle :

$$\Delta U = Q_{\text{rev}} + W_{\text{rev}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{rev}} = -W_{\text{rev}},$$

d'où

$$W_{\text{rev}} = -Q_{\text{rev}} = -nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2)$$

b) Puisque le gaz subit une transformation réversible, sa variation élémentaire d'entropie s'écrit

$$dS_1 = \frac{\delta Q}{T_0} \quad (\text{car } T = T_0)$$

or, la transformation est isotherme, donc $\delta Q = -\delta W$, et en tenant compte de l'équation (1), on obtient :

$$dS_1 = nR \frac{dV}{V},$$

soit, après intégration :

$$\Delta S_1 = nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Au cours de la détente du gaz, la source cède une quantité de chaleur Q'_{rev} à la température T_0 . Sa variation d'entropie est donc :

$$\Delta S'_1 = \frac{Q'_{rev}}{T_0}.$$

L'ensemble gaz-source étant thermiquement isolé, on peut écrire : $Q'_{rev} + Q_{rev} = 0$, et en tenant compte de l'équation (2), il vient :

$$Q'_{rev} = -nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1};$$

on en déduit alors :

$$\Delta S'_1 = -nR \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

c) Puisque la transformation est réversible, la variation d'entropie de l'univers est nulle : $\Delta S_{univers} = 0$. On a :

$$\Delta S_{univers} = \Delta S_1 + \Delta S'_1 = 0,$$

relation que l'on vérifie immédiatement en ajoutant les variations d'entropie ΔS et $\Delta S'$ calculées précédemment :

$$\Delta S_{univers} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} - nR \ln \frac{V_2}{V_1} = 0.$$

2°

a) La transformation est irréversible : on ne peut pas définir la pression P du gaz à chaque instant de la transformation. En revanche, dans l'état final, cette pression est définie et égale à la pression extérieure P_{ext} . D'autre part, l'air extérieur reste à température constante (le milieu extérieur est assimilable à une source de chaleur). La transformation est monotherme. L'équilibre initial impose $T_{gaz} = T_{ext} = T_0$ et l'équilibre final impose $T_{gaz} = T_{ext} = T_0$ puisque les parois du cylindre sont diathermanes. Dans l'état d'équilibre final, l'équation d'état du gaz parfait permet d'écrire :

$$P_{ext} V_2 = nRT_0,$$

d'où

$$P_{ext} = \frac{nRT_0}{V_2}. \quad (3)$$

b) Au cours de la transformation monotherme, le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W = -P_{ext} dV.$$

En intégrant, on obtient le travail total échangé avec le milieu extérieur :

$$W = -P_{ext} \int_{V_1}^{V_2} dV = -P_{ext} (V_2 - V_1),$$

car la pression extérieure P_{ext} est constante. En tenant compte de l'équation (3), il vient :

$$W = -\frac{nRT_0}{V_2}(V_2 - V_1) = -nRT_0\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right).$$

Puisque la température du gaz est la même pour les états d'équilibre initial et final, l'énergie interne du gaz parfait n'a pas varié. On en déduit :

$$\Delta U = Q + W = 0 \Rightarrow Q = -W,$$

il en résulte que

$$W = -Q = -nRT_0\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right). \quad (4)$$

c) L'entropie étant une fonction d'état et le calcul de sa variation ne dépend que de l'état initial et de l'état final du système. On peut imaginer une transformation réversible menant le gaz du même état initial de volume V_1 au même état final V_2 . Autrement dit, on se retrouverait dans la même situation que précédemment. On aura alors :

$$\Delta S_2 = \Delta S_1 = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

La source de chaleur effectue le transfert thermique $-Q$ au profit du gaz. Sa variation d'entropie s'écrit :

$$\Delta S_2' = \frac{-Q}{T_0}$$

puisque sa température T_0 est constante. En tenant compte la relation (4), il vient :

$$\Delta S_2' = -nR\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right).$$

La variation d'entropie de l'ensemble gaz-source vaut donc

$$\Delta S_{univers} = \Delta S_2 + \Delta S_2' = nR \ln \frac{V_2}{V_1} - nR\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right).$$

Puisque la transformation est irréversible, le second principe prévoit que :

$$\Delta S_{univers} > 0,$$

soit

$$\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) - \ln \frac{V_1}{V_2} > 0.$$

Remarques

- Pour la transformation irréversible considérée en 2° , $\Delta T = 0$ et $\Delta U = 0$; mais la transformation n'est pas isotherme (ni isoénergétique) puisque la température n'est pas constante!
- En posant $x = \frac{V_1}{V_2}$, on vérifiera sans difficulté que l'expression $(x-1) - \ln x$ est toujours positive quel que soit $x \neq 1$.

QCM

1° Lors d'un cycle, la variation de l'énergie interne d'un gaz parfait dépend de

- ☐ la nature des transformations
☐ la température initiale et de la température finale
☐ la capacité calorifique à volume constant du gaz
☒ d'aucun paramètre

Réponse :

Considérons une transformation quelconque menant le gaz d'un état initial de température T_i à un état final de température T_f . Le gaz étant parfait, on a $\Delta U = nC_v(T_f - T_i)$. Or pour un cycle, $T_f = T_i$, ce qui implique que $\Delta U = 0$. Donc la variation d'énergie interne ne dépend d'aucun paramètre.

2° Lors d'un processus isotherme, l'enthalpie H d'un gaz parfait

- ☐ augmente ☒ reste constante ☐ diminue

Réponse :

L'enthalpie d'un gaz est définie par $H = U + PV$; or pour un gaz parfait, $U = nC_vT$ et $PV = nRT$. On en déduit alors

$$H = n(C_v + R)T,$$

soit

$$H = nC_pT,$$

puisque $C_v + R = C_p$. Donc pour une transformation isotherme ($T = \text{Cste}$), l'enthalpie H reste constante.

3° Lors d'un processus irréversible, l'entropie d'un système isolé

- ☒ augmente ☐ reste constante ☐ diminue

Réponse :

Lorsqu'un système gazeux, isolé du milieu extérieur, subit une transformation adiabatique, le bilan entropique permet d'écrire :

$$\Delta S_{\text{univers}} = \Delta S_{\text{système}} + \Delta S_{\text{source}},$$

avec $\Delta S_{\text{source}} = -S_{\text{échangée}} = -\int_i^f \frac{\delta Q}{T_s} = 0$, puisque le système n'échange pas de chaleur

($\delta Q = 0$) avec le milieu extérieur. Donc

$$\Delta S_{\text{univers}} = \Delta S_{\text{système}},$$

De plus, la transformation est adiabatique ; le second principe impose $\Delta S_{\text{univers}} > 0$. Il en résulte que l'entropie d'un système isolé augmente au cours d'une transformation irréversible.

4° Pour un système qui subit une transformation adiabatique, la fonction d'état jouant le rôle de potentiel thermodynamique est :

- ☐ l'enthalpie
- ☐ l'énergie interne
- ☒ l'entropie
- ☐ l'énergie libre

Réponse :

Lorsqu'un système isolé s'approche de son état d'équilibre, son entropie augmente (voir QCM en 3°) et atteint son maximum à cet état d'équilibre. Ainsi pour un système isolé en état d'équilibre, nous avons :

$$S = S_{\max} ; dS = 0 \text{ et } d^2S < 0.$$

En raison de ces propriétés, l'entropie d'un système isolé s'appelle "potentiel thermodynamique" tout comme l'énergie potentielle en mécanique.

5° Le parcours d'un cycle moteur doit être

- ☐ dans le sens trigonométrique
- ☒ dans le sens horaire
- ☐ quelconque

Réponse :

Voir l'exercice 1 (1° + remarques) de ce rattrapage.