

Epreuve de rattrapage

Exercice 1 : (8 points)

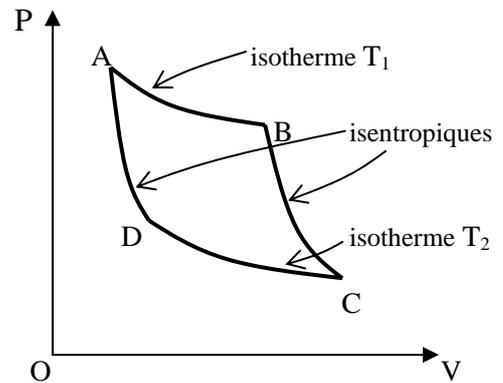
Un moteur de Carnot fonctionne de façon réversible entre deux sources de chaleur de températures $T_1 = 1000^\circ\text{C}$ et $T_2 = 0^\circ\text{C}$. Le moteur fournit un travail W à l'extérieur, en prenant de la chaleur $Q_1 = 10^6\text{ J}$ à la source chaude et en restituant Q_2 à la source froide

1° Dans quel sens est décrit le cycle moteur de Carnot ?

2° En écrivant les deux principes de la thermodynamique pour ce cycle réversible, calculer, en fonction de Q_1 , T_1 et T_2 , le travail W fourni par ce moteur. Faire l'application numérique.

3° En déduire le rendement thermique ρ de ce moteur.

4° Calculer les variations d'entropie ΔS_1 et ΔS_2 des deux sources de chaleur.

**Exercice 2 (6 points)**

Un récipient fermé par un piston renferme 2 g d'hélium, considéré comme un gaz parfait monoatomique, dans les conditions (P_1, V_1) . On opère une détente adiabatique de façon réversible, qui amène le gaz dans les conditions (P_2, V_2) . On donne $P_1 = 10\text{ atm}$, $V_1 = 10\text{ L}$, $P_2 = 3\text{ atm}$.

1° Calculer :

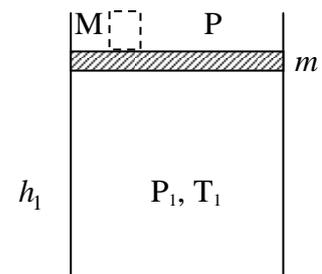
- le volume final V_2 ;
- le travail échangé par le gaz ;
- la variation d'énergie interne ΔU du gaz.

2° En déduire la variation de température du gaz, sans calculer la température T_1 .

On donne : $R = 8,32\text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$ et $M = 4\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Exercice 3 (6 points)

On considère un cylindre fermé par un piston d'épaisseur très faible, de masse $m = 10\text{ g}$ et de diamètre $d = 8\text{ cm}$. Le cylindre contient un gaz et le bord inférieur du piston est en équilibre à une hauteur $h_1 = 21\text{ cm}$ au-dessus du fond. La pression atmosphérique vaut $P = 1\text{ atm}$.



1° Calculer la pression P_1 du gaz contenu dans le cylindre sachant que l'équilibre se traduit par :

$$P_1 S = PS + mg,$$

où S est la section du piston.

2° On place des masses marquées sur le piston dont la somme est M . Celui-ci s'enfonce et le bord inférieur du piston est à une hauteur $h_2 = 19,7$ cm. La température reste constante et égale à 21°C . Que vaut alors la pression P_2 du gaz ?

3° Quelle masse M a-t-on placé sur le piston ?

4° La masse M restant sur le piston, on élève la température du gaz. Pour quelle valeur de la température T_3 le piston reviendra-t-il à son niveau initial ?

On donne : $1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Corrigé

Exercice 1

1° Désignons par W_{ABC} le travail échangé lors de la détente isotherme AB suivi de la détente isentropique BC. Ce travail est **négatif** (car $dV > 0$ au cours de chacune de ces transformations) ; il représente l'opposé de l'aire A_1 délimitée par la courbe ABC, les deux verticales V_A et V_C et l'axe des abscisses.

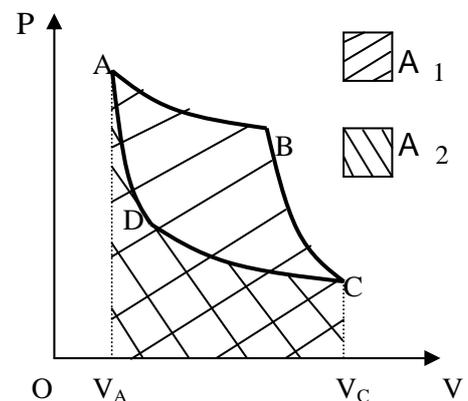
De la même manière, le travail W_{CDA} échangé au cours de la compression isotherme CD ($dV < 0$) suivi de la compression isentropique DA ($dV < 0$) est **positif**. Il est représenté sur le diagramme ci-contre par l'aire A_2 délimitée par la courbe CDA, les deux verticales V_A et V_C et l'axe des abscisses.

Le travail échangé au cours du cycle est donc $W = A_2 - A_1 < 0$ (car $A_2 < A_1$), ce qui correspond bien à un cycle moteur. Il en résulte que le cycle moteur est décrit dans le sens ABCDA (sens des aiguilles d'une montre).

2° D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = W + Q_1 + Q_2,$$

puisque les transformations BC et DA sont isentropiques (Q_{BC} et Q_{DA} sont nuls).



Remarque

La variation d'énergie interne est nulle sur le cycle car U est une fonction d'état.

D'où

$$W = -Q_1 + Q_2. \quad (1)$$

En appliquant le deuxième principe de la thermodynamique pour ce cycle réversible, on peut écrire :

$$\Delta S_{univers} = 0 = \Delta S_{système} + \Delta S_F + \Delta S_C \Rightarrow \Delta S_{univers} = 0 = \Delta S_F + \Delta S_C,$$

puisque $\Delta S_{système} = 0$ au cours du cycle.

En désignant par \dot{Q}_F la quantité de chaleur reçue par la source froide, et \dot{Q}_C la quantité de chaleur cédée par la source chaude, il vient :

$$\Delta S_{univers} = 0 = \frac{\dot{Q}_F}{T_1} + \frac{\dot{Q}_C}{T_2},$$

La chaleur cédée par la source chaude est l'opposé de celle récupérée par le système, soit $\dot{Q}_C = -Q_1$. De même, la chaleur récupérée par la source froide est l'opposé de celle cédée par le système : $\dot{Q}_F = -Q_2$. Donc

$$\Delta S_{univers} = 0 = \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{-Q_2}{T_2},$$

soit

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (2)$$

Remarques

- La variation d'entropie du système est nulle sur le cycle car S est une fonction d'état.
- La notation Q désigne la quantité de chaleur échangée par le système tandis que Q' désigne la quantité de chaleur échangée par les sources de chaleur. On prendra \dot{Q}_C ou \dot{Q}_F selon que la source soit chaude ou froide.
- La relation (2) est connue sous le nom d'égalité de Clausius lors d'une évolution réversible.

En combinant les équations (1) et (2), on en déduit immédiatement :

$$W = Q_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right). \quad (3)$$

Application numérique :

$$W = 10^6 \times \left(\frac{273}{1273} - 1 \right) = -7,85 \cdot 10^5 \text{ J.}$$

3° Le rendement thermique ρ d'un moteur est défini par :

$$\rho = \frac{\text{gain}}{\text{dépense}} = \frac{\text{travail fourni au cours du cycle}}{\text{chaleur extraite de la source froide}} = \frac{|W|}{Q_1},$$

soit, en tenant compte de l'équation (3)

$$\rho = \frac{-W}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Application numérique :

$$\rho = 1 - \frac{273}{1273} \approx 0,785,$$

ou

$$\rho = 78,5 \%$$

4° La variation d'entropie ΔS_1 de la source chaude est donnée par

$$\Delta S_1 = \int_A^B dS_1 = \int_A^B \frac{\delta Q'}{T_1} = \frac{Q'_{AB}}{T_1} = \frac{Q'_C}{T_1},$$

or d'après 2°, $Q'_C = -Q_1$, donc

$$\Delta S_1 = \frac{-Q_1}{T_1}.$$

De même, la variation d'entropie ΔS_2 de la source froide s'écrit :

$$\Delta S_2 = \int_C^D dS_2 = \int_C^D \frac{\delta Q'}{T_2} = \frac{Q'_{CD}}{T_2} = \frac{Q'_F}{T_2},$$

soit

$$\Delta S_2 = \frac{-Q_2}{T_2}.$$

Remarque

Le moteur (le système) prend la chaleur ($Q_1 > 0$) à la source chaude et cède la chaleur ($Q_2 < 0$) à la source froide. Donc $\Delta S_1 = \frac{-Q_1}{T_1} < 0$ et $\Delta S_2 = \frac{-Q_2}{T_2} > 0$ alors que leur somme est nulle, $\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$, puisque le cycle est décrit de façon réversible.

Exercice 2

1° a) On fait subir à ce gaz une détente adiabatique réversible de l'état initial (P_1, V_1) à l'état final (P_2, V_2) . A la fin de la détente, le volume V_2 est donné par l'équation de Laplace :

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \Rightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Application numérique :

$$V_2 = 10 \left(\frac{10}{3} \right)^{\frac{3}{5}} \approx 20,6 \text{ L}.$$

b) • Première méthode

Le travail élémentaire reçu par le gaz au cours de la détente adiabatique s'écrit :

$$\delta W = -P_{\text{ext}} dV = -P dV, \quad (1)$$

puisque la transformation est réversible.

Or d'après la loi de Laplace,

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma = P V^\gamma = \text{Cte} \Rightarrow P = \frac{\text{Cte}}{V^\gamma}.$$

En remplaçant P dans l'équation (1), il vient :

$$\delta W = -\frac{\text{Cte}}{V^\gamma} dV.$$

Le travail total échangé par le gaz au cours de la détente est :

$$W = \int_{V_1}^{V_2} -\frac{\text{Cte}}{V^\gamma} dV = -\text{Cte} \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_1}^{V_2} = \frac{1}{1-\gamma} \left[\text{Cte} V_1^{1-\gamma} - \text{Cte} V_2^{1-\gamma} \right] = \frac{1}{1-\gamma} \left[\left(P_1 V_1^\gamma \right) V_1^{1-\gamma} - \left(P_2 V_2^\gamma \right) V_2^{1-\gamma} \right]$$

soit

$$W = \frac{1}{\gamma - 1} (P_2 V_2 - P_1 V_1).$$

Application numérique :

$$W = \frac{3}{2} \left(3 \cdot 10^5 \times 20,6 \cdot 10^{-3} - 10 \cdot 10^5 \times 10 \cdot 10^{-3} \right) \approx -5730 \text{ J}.$$

• Deuxième méthode

La variation élémentaire d'énergie interne est d'après le principe de la thermodynamique

$$dU = \delta W + \delta Q.$$

Or, pour une transformation adiabatique, $\delta Q = 0$, donc $dU = \delta W$.

Par ailleurs, le gaz étant parfait, on a : $dU = nC_V dT$,

d'où le travail élémentaire au cours de la détente adiabatique

$$\delta W = nC_V dT,$$

en utilisant le fait que $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$, il vient :

$$\delta W = \frac{nR}{\gamma - 1} dT.$$

Remarques

- dU représente la variation d'énergie interne entre deux états voisins ;
- δQ et δW représentent des petites quantités (et non des variations) de transfert thermique ou de travail reçus par le système ;
- les formules $dU = nC_V dT$ et $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$ sont valables seulement pour un gaz parfait.

Après intégration entre l'état initial et l'état final, on obtient :

$$W = \int_{T_1}^{T_2} \frac{nR}{\gamma - 1} dT = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = \frac{1}{\gamma - 1} (nRT_2 - nRT_1).$$

En tenant compte des équations d'état du gaz parfait aux états initial et final: $P_1 V_1 = nRT_1$ et $P_2 V_2 = nRT_2$, on obtient :

$$W = \frac{1}{\gamma - 1} (P_2 V_2 - P_1 V_1) = -5730 \text{ J}.$$

c) Pour transformation adiabatique, le premier principe permet d'écrire (voir la deuxième méthode de 1° b) :

$$dU = \delta W.$$

En intégrant cette relation, on obtient :

$$\Delta U = W = -5730 \text{ J}.$$

Exercice 3

1° De la relation $P_1 S = PS + mg$, on en déduit la pression P_1 :

$$P_1 = P + \frac{mg}{S},$$

où S est la section du piston supposé circulaire : $S = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$. D'où

$$P_1 = P + \frac{4mg}{\pi d^2}.$$

Application numérique :

$$P_1 = 1,013 \cdot 10^5 + \frac{4 \times 10 \cdot 10^{-3} \times 9,8}{\pi \times (8 \cdot 10^{-2})^2} \approx 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

ou bien

$$P_1 = 1 \text{ atm.}$$

Remarques

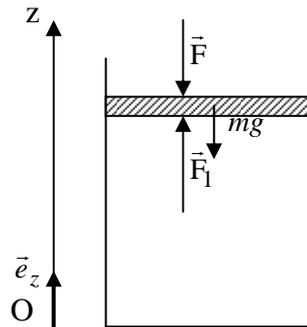
– L'équation qui relie P_1 à P traduit l'équilibre mécanique du piston ; celui-ci est soumis aux forces suivantes :

- la force due à la pression de l'atmosphère extérieure :
 $\vec{F} = -PS\vec{e}_z$;
- la force due à la pression du gaz emprisonné : $\vec{F}_1 = +P_1S\vec{e}_z$;
- le poids du piston : $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$

A l'équilibre : $-PS\vec{e}_z + P_1S\vec{e}_z - mg\vec{e}_z = \vec{0}$,
soit

$$P_1S = PS + mg.$$

– Le calcul de P_1 montre qu'on peut négliger le terme mg/S devant P , ce qui revient à supposer que le piston a une masse négligeable. Donc la pression exercée par le gaz est très proche de la pression exercée par l'atmosphère.



2° En appliquant l'équation du gaz parfait aux états initial et final, on peut écrire : $P_1V_1 = nRT_1$ et $P_2V_2 = nRT_2$. Or $T_1 = T_2$, donc

$$P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow P_1Sh_1 = P_2Sh_2,$$

d'où

$$P_2 = P_1 \frac{h_1}{h_2}.$$

Application numérique :

$$P_2 = 1 \times \frac{21}{19,7} = 1,067 \text{ atm.}$$

Remarque

Peu importe la façon dont la transformation a été réalisée :

- Dans le cas d'une transformation **quasi-statique**, les masses (infiniment petites) sont ajoutées progressivement de sorte qu'on peut considérer la transformation comme isotherme : $T_1 = T_2 = T = \text{Cte}$.
- Dans le cas d'une transformation **non quasi-statique**, les masses sont posées brutalement sur le piston, ce qui fait apparaître des inhomogénéités de densité importantes en raison du déplacement rapide du piston. La transformation n'est pas isotherme car la température n'est pas définie au cours de la transformation mais aux états initial et final les températures sont les mêmes : $T_1 = T_2$.

3° La condition d'équilibre mécanique du piston (voir remarques en 1°) se traduit par la nouvelle équation suivante :

$$P_2 S = PS + (m + M)g \approx PS + Mg ,$$

puisque mg est négligeable devant PS . On obtient alors :

$$M = \frac{(P_2 - P)S}{g} = \frac{\pi(P_2 - P)d^2}{4g} .$$

Application numérique :

$$M = \frac{\pi(1,067 - 1) \times 1,013 \cdot 10^5 \times (8 \cdot 10^{-2})^2}{4 \times 9,8} \approx 3,48 \text{ kg} .$$

4° La pression exercée par l'extérieur (masse $(M + m)$ + atmosphère) reste constante durant toute la transformation qui consiste à chauffer le gaz de T_2 à T_3 . A l'état initial : $P_2 = P_{\text{ext}} \approx P + \frac{Mg}{S}$; à l'état final : $P_3 = P_{\text{ext}} \approx P + \frac{Mg}{S}$, donc $P_3 = P_2$. Pour calculer la température T_3 , il suffit d'appliquer la loi des gaz parfaits : $P_2 V_1 = nRT_3$ et $P_2 V_2 = nRT_1$, d'où

$$T_3 = T_1 \frac{V_1}{V_2} \Rightarrow T_3 = T_1 \frac{Sh_1}{Sh_2} ,$$

soit

$$T_3 = T_1 \frac{h_1}{h_2} .$$

Application numérique :

$$T_3 = 294 \times \frac{21}{19,7} \approx 313,4 \text{ K}$$

Remarque

Lorsqu'on chauffe le gaz de T_2 à T_3 , il subit une transformation irréversible qui fait remonter le piston rapidement à son niveau initial. La température et la pression du gaz ne sont ni uniformes ni définies au cours de l'évolution par contre la pression extérieure, P_{ext} , reste constante. Dans ce cas, on parle de transformation **monobare**.