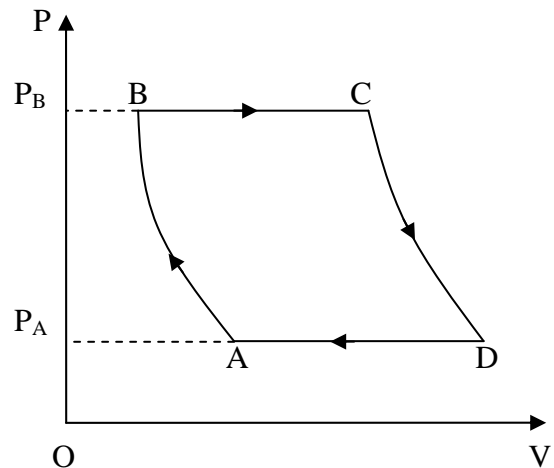


Epreuve de Rattrapage de Thermodynamique

Exercice 1 (10 points)

Soit une machine thermique utilisant comme fluide une mole d'air assimilé à un gaz parfait diatomique de masse molaire $M = 29 \text{ g}$. La machine fonctionne selon le cycle de Joule représenté sur la figure ci-contre. Il est composé de deux adiabatiques AB et CD et de deux isobares BC et DA au cours desquelles le gaz se met progressivement en équilibre thermique avec la source chaude à la température T_C ou avec la source froide à la température T_A . A l'état A, la pression est $P_A = 1 \text{ atm}$ et la température est $T_A = 300 \text{ K}$. A l'état C, la pression est $P_C = 5 \text{ atm}$ et la température est $T_C = 500 \text{ K}$. On



posera $x = \frac{P_B}{P_A}$.

Données : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$ et $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- 1° a) Ecrire l'équation de Laplace qui lie la température T et la pression P au cours d'une isentropique.
- b) Les transformations AB et CD étant décrites de manière réversible, calculer :
 - la température T_B en fonction de T_A , γ et x .
 - la température T_D en fonction de T_C , γ et x .
- c) Calculer les valeurs numériques de T_B et T_D .
- 2° Calculer les quantités de chaleur Q_{BC} et Q_{DA} échangées ainsi que les variations d'entropie ΔS_{BC} et ΔS_{DA} de l'air au cours des transformations BC et DA.
- 3° Calculer le travail W échangé par l'air au cours du cycle puis en déduire le rendement ρ de ce cycle.
- 4° Comparer ce rendement à celui qu'on obtiendrait si la machine fonctionnait selon le cycle de Carnot entre les mêmes sources de chaleur aux températures T_A et T_C .

Exercice 2 (6 points)

Un fluide obéit à l'équation d'état $V = V_0 - AP + BT$, où V_0 , A et B ont des constantes. Au cours d'une transformation réversible élémentaire, les différentielles de son enthalpie et son entropie sont données par :

$$dH = C_p dT + (h + V) dP \quad \text{et} \quad dS = \frac{C_p}{T} dT + \frac{h}{T} dP,$$

où C_p et h sont des coefficients calorimétriques qui dépendent a priori de T et P .

1° Déterminer les relations imposées par le fait que dH et dS sont des différentielles totales exactes.

2° Calculer h et montrer que C_p est indépendant de P .

3° En supposant que C_p ne dépend pas de T , calculer les fonctions d'état H et S .

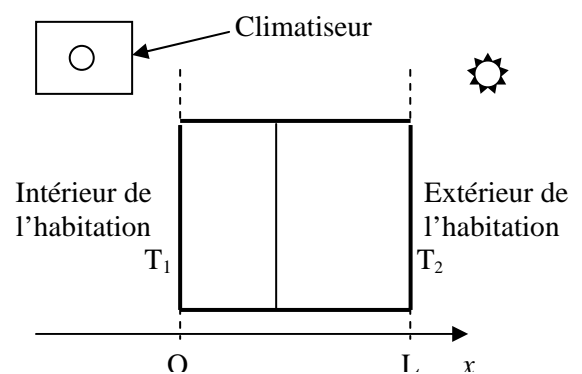
Exercice 3 (4 points)

On considère un mur d'habitation, homogène, de longueur L , caractérisée par sa masse volumique ρ , sa conductivité thermique λ et sa chaleur massique c . Ses extrémités $x=0$ et $x=L$ sont respectivement aux températures T_1 et T_2 . Les parois latérales de ce mur sont parfaitement calorifugées et la température $T(x)$ dans la barre ne dépend que de l'abscisse x le long de son axe.

1° Déterminer l'expression de $T(x)$ en régime permanent.

2° On est en été et il fait très chaud à l'extérieur avec $T_2 = 40^\circ \text{C}$. On désire alors refroidir, à l'aide d'un climatiseur, l'intérieur de l'habitation et la porter à $T_1 = 18^\circ \text{C}$. Représenter dans ce cas les variations de $T(x)$ pour $0 \leq x \leq L$.

3° Représenter en un point d'abscisse x du mur le vecteur densité de courant thermique \vec{j}_Q et calculer la puissance thermique P qui traverse une section transversale S du mur.



Corrigé

Exercice 1

1° a) Pour une transformation isentropique (ou adiabatique réversible), l'équation de Laplace qui lie T et P s'écrit :

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{Cte}.$$

b) Puisque la transformation qui amène le gaz de $A(P_A, T_A)$ à $B(P_B, T_B)$ est isentropique, on peut lui appliquer l'équation de Laplace :

$$T_A^\gamma P_A^{1-\gamma} = T_B^\gamma P_B^{1-\gamma} \Rightarrow T_B = T_A \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}},$$

ou encore

$$T_B = T_A x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (1)$$

De la même manière, on peut appliquer l'équation de Laplace pour la détente isentropique qui fait passer le gaz de C ($P_C = P_B, T_C$) à D ($P_D = P_A, T_D$) :

$$T_C^\gamma P_B^{1-\gamma} = T_D^\gamma P_A^{1-\gamma} \Rightarrow T_D = T_C \left(\frac{P_B}{P_A} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}},$$

soit

$$T_D = T_C x^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \quad (2)$$

c) Compte tenu des équations (1) et (2) et de la valeur du taux de compression $x = \frac{P_B}{P_A} = 5$, on obtient :

$$T_B = 300 \times 5^{\frac{0,4}{1,4}} \approx 475,1 \text{ K} \quad \text{et} \quad T_D = 500 \times 5^{-\frac{0,4}{1,4}} \approx 315,7 \text{ K}$$

2° Transformation isobare BC :

le gaz reçoit une quantité de chaleur Q_{BC} de la part de la source chaude donnée par :

$$Q_{BC} = C_p \int_{T_B}^{T_C} dT = C_p (T_C - T_B)$$

or, pour un gaz parfait diatomique, la capacité thermique molaire vaut : $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \frac{7}{2} R$, d'où

$$Q_{BC} = \frac{7}{2} R (T_C - T_B). \quad (3)$$

Application numérique :

$$Q_{BC} = \frac{7}{2} \times 8,32 \times (500 - 475,1) = 725,1 \text{ J}.$$

La variation d'entropie du gaz s'écrit :

$$\Delta S_{BC} = \int_B^C \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_B}^{T_C} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln \frac{T_C}{T_B} = \frac{7}{2} R \ln \frac{T_C}{T_B}.$$

Application numérique :

$$\Delta S_{BC} = \frac{7}{2} \times 8,32 \times \ln \frac{500}{475,1} = 1,487 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Transformation isobare DA :

La quantité de chaleur Q_{DA} cédée par le gaz à la source froide s'écrit :

$$Q_{DA} = C_p \int_{T_D}^{T_A} dT = C_p (T_A - T_D) = \frac{7}{2} R (T_A - T_D). \quad (4)$$

Application numérique :

$$Q_{DA} = \frac{7}{2} \times 8,32 \times (300 - 315,7) = -457,2 \text{ J}.$$

La variation d'entropie du gaz se calcule de la même manière que précédemment :

$$\Delta S_{DA} = \int_D^A \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_D}^{T_A} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln \frac{T_A}{T_D} = \frac{7}{2} R \ln \frac{T_A}{T_D}.$$

Application numérique :

$$\Delta S_{DA} = \frac{7}{2} \times 8,32 \times \ln \frac{300}{315,7} = -1,485 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Remarque

Si on tient compte des relations (1) et (2), les variations d'entropie s'écrivent :

$$\Delta S_{BC} = \frac{7}{2} R \ln \frac{T_C}{T_A x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad \text{et} \quad \Delta S_{DA} = \frac{7}{2} R \ln \frac{T_A}{T_C x^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} = \frac{7}{2} R \ln \frac{T_A x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T_C}. \quad \text{On voit que ces deux}$$

variations ont des signes opposées $\Delta S_{BC} = -\Delta S_{DA}$, ce qui était prévisible. En effet, puisque le gaz décrit un cycle, sa variation d'entropie est nulle : $\Delta S_{cycle} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DA} = 0$. Or $\Delta S_{AB} = \Delta S_{CD} = 0$ lors des isentropiques AB et CD, donc

$$\Delta S_{cycle} = \Delta S_{BC} + \Delta S_{DA} = 0 \Rightarrow \Delta S_{BC} = -\Delta S_{DA} = 0.$$

3° La variation d'énergie interne étant nulle au cours du cycle, le premier principe permet d'écrire :

$$\Delta U_{cycle} = W + Q = 0 \Rightarrow W = -Q,$$

or, $Q = Q_{BC} + Q_{DA}$ puisque $Q_{AB} = Q_{CD} = 0$, donc

$$W = -(Q_{BC} + Q_{DA}),$$

ou bien, en tenant compte des équations (3) et (4) :

$$W = \frac{7}{2} R [(T_B - T_C) + (T_D - T_A)].$$

Application numérique :

$$W = -(725,1 + 457,2) = -267,9 \text{ J}.$$

Le rendement du cycle est défini par :

$$\rho = \frac{\text{gain énergétique}}{\text{dépense énergétique}} = \frac{-W}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}.$$

Application numérique :

$$\rho = 1 + \frac{-457,2}{725,1} = 0,369 = 36,9 \text{ \%}.$$

5° Lorsque la machine fonctionne selon le cycle de Carnot, les deux isobares BC et DA sont remplacées par les deux isothermes de températures T_C et T_A (voir figure ci-contre). Les quantités de chaleur Q_{BC} et Q_{DA} deviennent (voir page) :

$$Q_{BC} = RT_C \ln \frac{V_C}{V_B} \text{ et } Q_{DA} = RT_A \ln \frac{V_A}{V_D}.$$

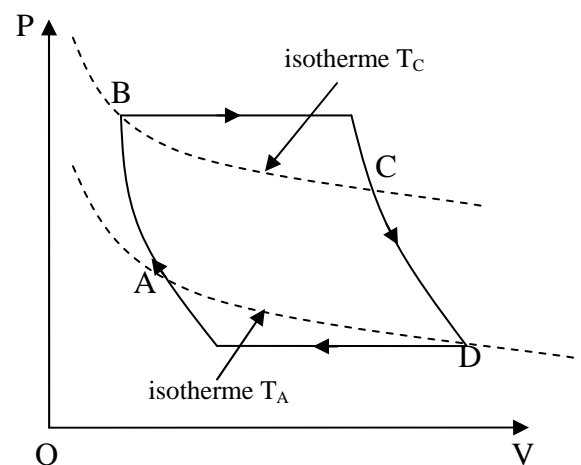
En tenant compte de l'égalité $\frac{V_D}{V_A} = \frac{V_C}{V_B}$, il vient :

$Q_{DA} = -RT_A \ln \frac{V_C}{V_B}$. Dans ce cas le rendement du cycle de Carnot s'écrit :

$$\rho_c = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 - \frac{RT_A \ln \frac{V_C}{V_B}}{RT_C \ln \frac{V_C}{V_B}} = 1 - \frac{T_A}{T_C}.$$

Application numérique :

$$\rho_c = 1 - \frac{300}{500} = 0,4 = 40 \text{ \%}.$$



Exercice 2

1° On sait qu'une condition nécessaire et suffisante (pour les fonctions que nous rencontrons en physique) pour qu'une forme différentielle $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ soit la différentielle d'une fonction est que $\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_y$ (voir polycopié de TD page 14). En appliquant ce résultat (théorème de Schwartz) à dH qui est une différentielle totale exacte, on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial(h+V)}{\partial P} \right)_P,$$

soit

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

En tenant compte de l'équation d'état, on obtient : $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \left[\frac{\partial}{\partial T} (V_0 - AP + BT) \right]_P = B$, d'où

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P + B. \quad (1)$$

De même le fait que dS soit une différentielle totale exacte permet d'écrire :

$$\left[\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{C_p}{T} \right) \right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{h}{T} \right) \right]_P,$$

soit

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = -\frac{h}{T^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P,$$

ou bien

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = -\frac{h}{T} + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P. \quad (2)$$

2° En éliminant $\left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T$ des relations (1) et (2), il vient :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P + B = -\frac{h}{T} + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P,$$

soit

$$h = -BT.$$

Dans ce cas, l'équation (1) devient :

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = -B + B = 0,$$

On en déduit alors que C_p est indépendant de P .

3° En reportant l'expression de h dans les différentielles dH et dS , on obtient :

$$dH = C_p dT + (-BT + V) dP = C_p dT + (V_0 - AP) dP,$$

et
$$dS = \frac{C_p}{T} dT - BdP,$$

soit, par intégration, en tenant compte des indications de l'énoncé :

$$H(T, P) = C_p T + V_0 P - \frac{1}{2} A P^2 + H_0,$$

et
$$S(T, P) = C_p \ln T - BP + S_0.$$

Exercice 3

1° L'équation de la chaleur à une dimension est de la forme :

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}.$$

En régime permanent, la température $T(x, t)$ ne dépend plus du temps :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0.$$

L'intégration donne une fonction affine de x :

$$T(x) = Ax + B,$$

où A et B sont deux constantes d'intégration.

Avec les conditions aux limites $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$, il vient :

$$A = \frac{T_2 - T_1}{L} \text{ et } B = T_1,$$

d'où la loi de la température

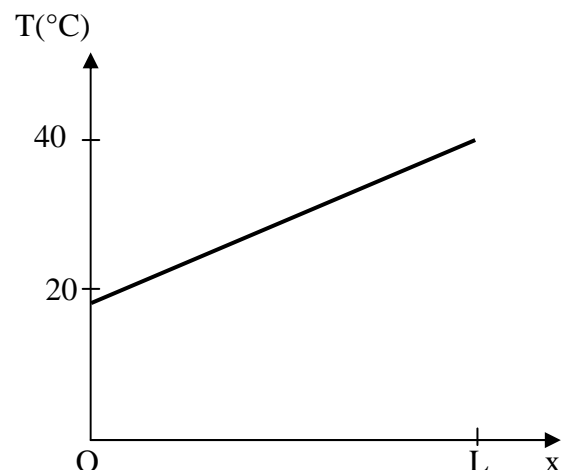
$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1.$$

2° Pour $T_1 = 18^\circ\text{C}$ et $T_2 = 40^\circ\text{C}$, la loi de $T(x)$ s'écrit :

$$T(x) = \frac{22}{L} x + 18 \text{ (en } ^\circ\text{C)};$$

son graphe dont l'allure est une droite (voir figure ci-contre) montre que lorsque l'abscisse x croît de 0 à L , la température croît de 18°C à 40°C .

3° La densité de courant thermique \vec{j}_Q est donnée



par la loi de Fourier :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T},$$

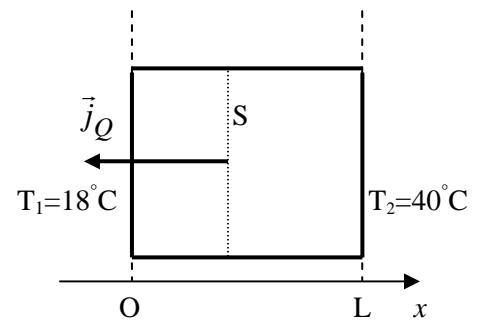
soit

$$\vec{j}_Q = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} \vec{e}_x,$$

ce vecteur, de module constant, est dans la direction et le sens négatif de l'axe Ox puisque $T_2 - T_1 > 0$ (voir figure ci-contre).

Remarque

Le vecteur \vec{j}_Q traduit le sens d'écoulement de la chaleur. Il est donc tout à fait logique que son sens soit négatif puisque la chaleur s'écoule des zones chaudes aux zones froides (cf. au deuxième principe).



La puissance thermique (ou le flux thermique) est donnée par :

$$P = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S},$$

où $d\vec{S}$ est un vecteur orienté suivant la normale à la section S : $d\vec{S} = -dS \vec{e}_x$. En tenant compte de l'expression du vecteur \vec{j}_Q , on obtient :

$$P = \iint_S \lambda \frac{T_2 - T_1}{L} dS = \lambda \frac{T_2 - T_1}{L} S.$$

Remarque

Nous avons choisi d'orienter le vecteur $d\vec{S}$ dans le sens négatif afin d'obtenir un signe algébrique positif pour la puissance thermique P .