EM - EXERCICES SUR LE CALCUL DE PRIMITIVES

1) $(x^2 - x)\sin x$

2) $(x^3 - 2x + 1)e^{-x}$

3) $e^{5x}\cos 7x$

4) $\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$

5) $\dfrac{x^2}{8x^3+1}$

6) $\dfrac{(x-1)^2}{x^2+4}$

7) $\dfrac{x}{(x+1)^2}$

8) $\dfrac{x^3}{x^4-1}$

9) $\dfrac{3x^8+6x^5+6x^2}{(x^3+1)^7}$

10) $\dfrac{x^3-x+5}{(x+1)^7(x^2+x+1)}$

11) $\dfrac{3x^3-4x^2+2x}{(x^3-2x^2+2x-1)^2}$

12) $\dfrac{1}{(x^3+1)^2}$

13) $\arctan\dfrac{x+1}{x-2}$

14) $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

15) $\tan^5 x$

16) $\dfrac{\cos^4 x}{\sin x}$

17) $\dfrac{\cos 2x}{\sin x + \sin 3x}$

18) $\sin^2 x \cos^3 2x$

19) $\sin^2 x\ \cos^3 x$

20) $\dfrac{1}{2+\cos x}$

21) $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

22) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}$

23) $\dfrac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}$

24) $\dfrac{1}{x^2+x\sqrt{2x-x^2}}$

25) $\dfrac{\sqrt{(x+1)(x+3)}}{x+2}$

26) $\dfrac{x}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

27) $\dfrac{1}{\sqrt{5x+7}+\sqrt{1-x^2}}$

28) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

29) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x}}$

30) $x^2\arcsin x$

EM 2

31) a) Calculer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}.$$

Quel est le domaine de définition de F ?

b) Pourquoi la fonction f possède-t-elle une primitive dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$? Déterminer cette primitive notée G.

c) Calculer $\int\limits_{\pi/2}^{2\pi} f(x)\,dx$.

32) Trouver une primitive de

$$f(x) = x \arctan \frac{x-1}{x+1}.$$

33) a) Déterminer une primitive de

$$f(x) = \frac{x+8}{x^2 + 2x + 3}.$$

b) Déterminer une primitive de

$$g(x) = \frac{x^4 + 1}{x(x^2 + 2x + 3)}.$$

34) a) Calculer une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x(x^2 + x + 1)}.$$

b) Calculer une primitive de la fonction g définie par

$$g(t) = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t \cos^2 t} \, \frac{2 - \sin 2t}{2 + \sin 2t}.$$

35) Calculer une primitive de

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{(x+1)(x^2 + x + 1)}.$$

En déduire, en justifiant le choix du changement de variable utilisé, une primitive de

$$g(x) = \frac{\sin 2x(2 - \cos^2 x) + 2\cos x}{(\sin x + 1)(2 + \sin x - \cos^2 x)}.$$

36) Calculer une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}},$$

a) en faisant le changement de variable : $x = \sin^2 t$

b) en faisant le changement de variable : $u = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

Les deux primitives trouvées sont-elles les mêmes ?

En utilisant successivement les deux formules obtenues, calculer

$$I = \int_0^{1/2} f(x)\, dx\,.$$

EM 4

Corrigé des exercices sur le calcul de primitives

Remarque : dans les calculs ci-dessous, nous donnons à chaque fois **une** primitive des fonctions proposées.

1) On peut intégrer par parties :

$$\int (x^2 - x)\sin x\,dx = -(x^2 - x)\cos x + \int (2x-1)\cos x\,dx\,,$$

puis

$$\begin{aligned}\int (2x-1)\cos x\,dx &= (2x-1)\sin x - \int 2\sin x\,dx \\ &= (2x-1)\sin x + 2\cos x\end{aligned}$$

d'où

$$\int (x^2 - x)\sin x\,dx = (-x^2 + x + 2)\cos x + (2x-1)\sin x\ .$$

2) On peut intégrer par parties, ou procéder par identification. La fonction admet une primitive de la forme

$$P(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x}\,.$$

On calcule la dérivée

$$P'(x) = (-ax^3 + (3a-b)x^2 + (2b-c)x + (c-d))e^{-x}\,,$$

et l'on identifie. Puisque l'on veut

$$P'(x) = (x^3 - 2x + 1)e^{-x}\,,$$

on obtient le système

$$\left\{\begin{aligned} -a &= 1 \\ 3a - b &= 0 \\ 2b - c &= -2 \\ c - d &= 1 \end{aligned}\right.\,,$$

d'où l'on tire facilement $(a, b, c, d) = (-1, -3, -4, -5)$. Une primitive vaut donc

$$P(x) = -(x^3 + 3x^2 + 4x + 5)e^{-x}\,.$$

3) On intègre deux fois de suite par parties

$$\int e^{5x}\cos 7x\,dx = e^{5x}\frac{\sin 7x}{7} - \int 5e^{5x}\frac{\sin 7x}{7}\,dx\,,$$

puis

$$\int e^{5x}\sin 7x\,dx = -e^{5x}\frac{\cos 7x}{7} + \int 5e^{5x}\frac{\cos 7x}{7}\,dx\,.$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}\int e^{5x}\cos 7x\,dx &= e^{5x}\frac{\sin 7x}{7} - \frac{5}{7}\left(-e^{5x}\frac{\cos 7x}{7} + \int 5e^{5x}\frac{\cos 7x}{7}\,dx\right)\\ &= \frac{1}{49}(7\sin 7x + 5\cos 7x)e^{5x} - \frac{25}{49}\int e^{5x}\cos 7x\,dx\,.\end{aligned}$$

D'où

$$\left(1+\frac{25}{49}\right)\int e^{5x}\cos 7x\,dx = \frac{1}{49}(7\sin 7x + 5\cos 7x)e^{5x}\,,$$

et finalement

$$\begin{aligned}\int e^{5x}\cos 7x\,dx &= \frac{1}{49+25}(7\sin 7x + 5\cos 7x)e^{5x}\\ &= \frac{1}{74}(7\sin 7x + 5\cos 7x)e^{5x}\,.\end{aligned}$$

4) La fonction n'est définie que si x est positif. On peut écrire

$$\sqrt{x}\sin\sqrt{x} = x\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,.$$

Effectuons tout d'abord le changement de variable

$$u = \sqrt{x}\,.$$

On a donc

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}\,,$$

et l'on se ramène à calculer

$$\int 2u^2\sin u\,du\,,$$

ce qui se fait par parties par exemple.

$$\int 2u^2\sin u\,du = -2u^2\cos u + \int 4u\cos u\,du\,,$$

puis

$$\int 4u\cos u\,du = 4u\sin u - \int 4\sin u\,du = 4u\sin u + 4\cos u\,,$$

d'où

$$\int 2u^2 \sin u \, du = -2u^2 \cos u + 4u \sin u + 4 \cos u \,,$$

et en revenant à la variable x,

$$\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} \, dx = -2x \cos \sqrt{x} + 4\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 4 \cos \sqrt{x} \,.$$

5) La fonction n'est définie que si $x \neq -1/2$. On remarque que

$$d(8x^3 + 1) = 24x^2 dx \,.$$

donc

$$\int \frac{x^2 \, dx}{8x^3 + 1} = \frac{1}{24} \int \frac{d(8x^3 + 1)}{8x^3 + 1} = \frac{1}{24} \ln |8x^3 + 1| \,.$$

6) Le numérateur peut s'écrire

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 = (x^2 + 4) - 2x - 3 \,.$$

Alors

$$\int \frac{(x-1)^2}{x^2 + 4} \, dx = \int \left(1 - \frac{2x}{x^2 + 4} - \frac{3}{x^2 + 4} \right) dx \,.$$

Mais

$$\int \frac{2x}{x^2 + 4} \, dx = \int \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4} = \ln(x^2 + 4) \,,$$

et

$$\int \frac{1}{x^2 + 4} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \,.$$

Donc

$$\int \frac{(x-1)^2}{x^2 + 4} \, dx = x - \ln(x^2 + 4) - \frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} \,.$$

7) La fonction est définie pour $x \neq -1$. En écrivant $x = (x + 1) - 1$, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x+1)^2} \, dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \ln |x + 1| + \frac{1}{x+1} \,. \end{aligned}$$

8) La fonction est définie pour $x \neq \pm 1$. On a immédiatement

$$\int \frac{x^3}{x^4-1}\,dx = \int \frac{1}{4}\,\frac{d(x^4-1)}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x^4-1|\,.$$

9) Le numérateur s'écrit

$$3x^2(x^6+2x^3+2)dx = (x^6+2x^3+2)d(x^3+1) = ((x^3+1)^2+1)d(x^3+1)\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^8+6x^5+6x^2}{(x^3+1)^7}\,dx &= \int \left(\frac{d(x^3+1)}{(x^3+1)^5} + \frac{d(x^3+1)}{(x^3+1)^7}\right)\\ &= -\left(\frac{1}{4(x^3+1)^4} + \frac{1}{6(x^3+1)^6}\right)\,.\end{aligned}$$

10) On décompose la fraction rationnelle en éléments simples. Posons $u = x+1$. La fraction devient

$$\frac{x^3-x+5}{(x+1)^7(x^2+x+1)} = \frac{(u-1)^3-(u-1)+5}{u^7((u-1)^2+(u-1)+1)} = \frac{u^3-3u^2+2u+5}{u^7(u^2-u+1)}\,.$$

On effectue la division suivant les puissances croissantes de $5+2u-3u^2+u^3$ par $1-u+u^2$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|llll}
5 & +2u & -3u^2 & +u^3 & & & & & & 1 & -u & +u^2 & \\
\cline{10-13}
-5 & +5u & -5u^2 & & & & & & & 5 & +7u & -u^2 & -7u^3 \\
\cline{1-4}
 & 7u & -8u^2 & +u^3 & & & & & & & -6u^4 & +u^5 & +7u^6 \\
 & -7u & +7u^2 & -7u^3 & & & & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & -u^2 & -6u^3 & & & & & & & & & \\
 & & u^2 & -u^3 & +u^4 & & & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & -7u^3 & +u^4 & & & & & & & & \\
 & & & 7u^3 & -7u^4 & +7u^5 & & & & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & -6u^4 & +7u^5 & & & & & & & \\
 & & & & 6u^4 & -6u^5 & +6u^6 & & & & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & u^5 & +6u^6 & & & & & & \\
 & & & & & -u^5 & +u^6 & -u^7 & & & & & \\
\cline{6-8}
 & & & & & & 7u^6 & -u^7 & & & & & \\
 & & & & & & -7u^6 & +7u^7 & -7u^8 & & & & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & & 6u^7 & -7u^8 & & & &
\end{array}$$

On a donc

$$5+2u-3u^2+u^3 = (1-u+u^2)(5+7u-u^2-7u^3-6u^4+u^5+7u^6)+6u^7-7u^8\,,$$

et en divisant,

$$\frac{5+2u-3u^2+u^3}{u^7(1-u+u^2)} = \frac{5}{u^7}+\frac{7}{u^6}-\frac{1}{u^5}-\frac{7}{u^4}-\frac{6}{u^3}+\frac{1}{u^2}+\frac{7}{u}+\frac{6-7u}{1-u+u^2}\,.$$

En revenant à la variable x, on a la décomposition suivante :

$$\frac{x^3-x+5}{(x+1)^7(x^2+x+1)} = \frac{5}{(x+1)^7}+\frac{7}{(x+1)^6}-\frac{1}{(x+1)^5}-\frac{7}{(x+1)^4}-\frac{6}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{7}{x+1}-\frac{7x+1}{x^2+x+1}\,.$$

Le dernier terme se décompose, en faisant apparaître la dérivée du dénominateur, sous la forme

$$\frac{7x+1}{x^2+x+1} = \frac{7}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{5}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}\,.$$

On intègre alors directement, et l'on obtient

$$\int \frac{x^3-x+5}{(x+1)^7(x^2+x+1)}\,dx = -\frac{5}{6(x+1)^6}-\frac{7}{5(x+1)^5}+\frac{1}{4(x+1)^4}+\frac{7}{3(x+1)^3}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}$$
$$+7\ln|x+1|-\frac{7}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\,.$$

11) Le dénominateur de la fraction rationnelle a pour racine évidente $x=1$. Il se factorise sous la forme

$$(x^3-2x^2+2x-1)^2 = (x-1)^2(x^2-x+1)^2\,,$$

et s'annule uniquement en $x=1$.

La fraction rationnelle s'écrit

$$\frac{3x^3-4x^2+2x}{(x^3-2x^2+2x-1)^2} = x\,\frac{3x^2-4x+2}{(x^3-2x^2+2x-1)^2}\,.$$

On peut alors utiliser une intégration par parties en prenant

$$u=x \quad\text{et}\quad v'=\frac{3x^2-4x+2}{(x^3-2x^2+2x-1)^2}\,,$$

on a

$$u'=1 \quad\text{et}\quad v=\frac{-1}{x^3-2x^2+2x-1}\,,$$

donc

$$\int \frac{3x^3-4x^2+2x}{(x^3-2x^2+2x-1)^2}\,dx = \frac{-x}{x^3-2x^2+2x-1}+\int\frac{dx}{x^3-2x^2+2x-1}\,.$$

Il reste à décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{1}{x^3-2x^2+2x-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)}\,.$$

En posant $u = x - 1$, on obtient
$$\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{u(u^2+u+1)}\,,$$
et en écrivant
$$1 = (1+u+u^2) - (u+u^2)\,,$$
on obtient
$$\frac{1}{u(u^2+u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1+u}{u^2+u+1}\,.$$
En revenant à la variable x, on trouve
$$\frac{1}{x^3-2x^2+2x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2-x+1}\,.$$
Puis, en faisant apparaître la dérivée du dénominateur,
$$\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}\,,$$
d'où
$$\frac{1}{x^3-2x^2+2x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}\,.$$
Alors
$$\int \frac{dx}{x^3-2x^2+2x-1} = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\,.$$
Finalement
$$\int \frac{3x^3-4x^2+2x}{(x^3-2x^2+2x-1)^2}\,dx = \frac{-x}{x^3-2x^2+2x-1} + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\,.$$

12) Le dénominateur de la fraction rationnelle a pour racine évidente $x = -1$. Il se factorise sous la forme
$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)\,,$$
et s'annule uniquement en $x = -1$.

Dérivons $g(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$ On obtient
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(x^3+1) - x(3x^2)}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{-2(x^3+1)+3}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{-2}{x^3+1} + \frac{3}{(x^3+1)^2}\,. \end{aligned}$$

Donc
$$\frac{x}{x^3+1} = \int \frac{-2\,dx}{x^3+1} + \int \frac{3\,dx}{(x^3+1)^2}\,.$$
On en déduit que
$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{1}{3}\,\frac{x}{x^3+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3+1}\,.$$
On décompose la fraction rationnelle de droite. En posant $u = x+1$, on obtient
$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{u(u^2-3u+3)}\,,$$
et en écrivant
$$1 = \frac{1}{3}(3-3u+u^2) + (u - \frac{1}{3}u^2)\,,$$
on en déduit
$$\frac{1}{u(u^2-3u+3)} = \frac{1}{3u} + \frac{1}{3}\,\frac{3-u}{u^2-2u+3}\,.$$
En revenant à la variable x, on obtient
$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3}\,\frac{x-2}{x^2-x+1}\,.$$
Alors en faisant apparaître la dérivée du dénominateur on a
$$\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{3}{x^2-x+1}\,.$$
On a donc finalement
$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{6}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}\,,$$
ce qui s'intègre terme à terme. On obtient
$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\,,$$
et finalement
$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\,.$$

13) La fonction est définie pour $x \neq 2$. On intègre par parties en posant
$$u = \arctan\frac{x+1}{x-2} \quad \text{et} \quad v' = 1\,,$$
donc
$$u' = \frac{\dfrac{-3}{(x-2)^2}}{1+\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2} = \frac{-3}{2x^2-2x+5} \quad \text{et} \quad v = x\,.$$

Alors
$$\int \arctan\frac{x+1}{x-2}\,dx = x\arctan\frac{x+1}{x-2} + 3\int \frac{x\,dx}{2x^2-2x+5}\,.$$
En faisant apparaître la dérivée du dénominateur
$$\frac{x}{2x^2-2x+5} = \frac{1}{4}\,\frac{4x-2}{2x^2-2x+5} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2x^2-2x+5}\,,$$
d'où
$$\int \frac{x\,dx}{2x^2-2x+5} = \frac{1}{4}\ln(2x^2-2x+5) + \frac{1}{6}\arctan\frac{2x-1}{3}\,.$$
Finalement
$$\int \arctan\frac{x+1}{x-2}\,dx = \frac{3}{4}\ln(2x^2-2x+5) + \frac{1}{2}\arctan\frac{2x-1}{3} + x\arctan\frac{x+1}{x-2}\,.$$

14) La fonction est définie pour $x \neq 0$. On intègre par parties en posant
$$u = \ln(1+x^2) = \quad \text{et} \quad v' = \frac{1}{x^2}\,,$$
donc
$$u' = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{et} \quad v = -\frac{1}{x}\,.$$
Alors
$$\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(1+x^2)}{x} + \int \frac{2dx}{1+x^2} = -\frac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\arctan x\,.$$

15) La fonction est définie pour $x \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. En effectuant la division euclidienne du polynôme X^5 par X^2+1, on obtient
$$X^5 = (X^2+1)(X^3-X) + X\,,$$
et en remplaçant X par $\tan x$, on obtient
$$\begin{aligned}\int \tan^5 x\,dx &= \int (\tan^2 x+1)(\tan^3 x - \tan x)\,dx + \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx\\ &= \int (\tan^3 x - \tan x)\,d(\tan x) - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}\\ &= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\cos x|\,.\end{aligned}$$

16) La fonction est définie pour $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. On a
$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\,dx = -\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\,d(\cos x) = \int \frac{\cos^4 x}{\cos^2 x - 1}\,d(\cos x)$$

Par le changement de variable $u = \cos x$, on est ramené à chercher une primitive de la fraction rationnelle
$$\frac{u^4}{u^2-1} = \frac{u^4-1}{u^2-1} + \frac{1}{u^2-1} = u^2+1+\frac{1}{u^2-1}\,.$$
Comme
$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\,,$$
On obtient immédiatement
$$\int \frac{u^4}{u^2-1}\,du = \frac{u^3}{3} + u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\,.$$
Finalement
$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\,dx = \frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|\,.$$
Mais en remarquant que
$$\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}\,,$$
on a aussi
$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\,dx = \frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\,.$$

17) En transformant, on a
$$\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x = 4\sin x\cos^2 x\,.$$
La fonction est définie si $x \neq k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$, et on calcule
$$\int \frac{2\cos^2 x - 1}{4\sin x\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{2\cos^2 x-1}{4\sin^2 x\cos^2 x}\,d(\cos x)\,.$$
On procède comme dans l'exercice 16). Le changement de variable $u = \cos x$, ramène à la recherche d'une primitive de la fraction rationnelle
$$\frac{2u^2-1}{u^2(u^2-1)}\,.$$
C'est une fraction paire qui se décompose sous la forme
$$\frac{A}{u+1} - \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u^2}\,.$$
On trouve facilement $A = -1/2$ et $B = 1$. On obtient donc
$$\int \frac{2u^2-1}{u^2(u^2-1)}\,du = -\frac{1}{u} + \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\,.$$

On obtient alors, comme dans l'exercice précédent :

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \sin 3x}\,dx = \frac{1}{4}\left(\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{\cos x}\right).$$

18) On linéarise $\sin^2 x \cos^3 2x$.

$$\begin{aligned}
\sin^2 x\cos^3 2x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)^3\\
&= -\frac{1}{32}(e^{2ix}-2+e^{-2ix})(e^{6ix}+3e^{2ix}+3e^{-2ix}+e^{-6ix})\\
&= -\frac{1}{32}(e^{8ix}+3e^{4ix}+3+e^{-4ix}-2e^{6ix}-6e^{2ix}-6e^{-2ix}-2e^{-6ix}\\
&\qquad\qquad +e^{4ix}+3+3e^{-4ix}+e^{-8ix})\\
&= -\frac{1}{16}\left(\frac{e^{8ix}+e^{-8ix}}{2}-2\frac{e^{6ix}+e^{-6ix}}{2}+4\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}-6\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+3\right)\\
&= -\frac{1}{16}(\cos 8x-2\cos 6x+4\cos 4x-6\cos 2x+3)\,.
\end{aligned}$$

Ceci s'intègre immédiatement

$$\int \sin^2 x\cos^3 2x\,dx = -\frac{1}{16}\left(\frac{\sin 8x}{8}-\frac{\sin 6x}{3}+\sin 4x-3\sin 2x+3x\right).$$

19) Il est inutile de linéariser. On a en effet

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,\cos^3 x\,dx &= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\,d(\sin x)\\
&= \int (\sin^2 x-\sin^4 x)\,d(\sin x)\\
&= \frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}\,.
\end{aligned}$$

20) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais on on va utiliser le changement de variable $u = \tan(x/2)$ qui crée des discontinuités aux points $(2k+1)\pi$ où k est entier. On obtiendra par ce calcul une primitive dans chaque intervalle de la forme $]-\pi+2k\pi,\,\pi+2k\pi[$ où k est entier, et non pas dans $\mathbb{R}$. On écrit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+\cos x} &= \frac{1}{2+\dfrac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}}\\
&= \frac{1+\tan^2(x/2)}{3+\tan^2(x/2)}\,.
\end{aligned}$$

EM 14

Avec le changement de variable $u = \tan(x/2)$, on a

$$du = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx\,,$$

et on est ramené au calcul de l'intégrale

$$\int \frac{2du}{u^2+3}\,,$$

ce qui donne

$$\int \frac{2du}{u^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{u}{\sqrt{3}}\,,$$

et donc

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}\,.$$

Cette primitive est obtenue dans $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Si l'on veut obtenir une primitive dans $\mathbb{R}$ tout entier, il faut ajouter dans chaque intervalle $\left]-\pi + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi\right[$ une constante C_k de telle sorte que la fonction se prolonge par continuité aux points $(2k+1)\pi$. En remarquant que

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,,$$

et

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,,$$

on peut vérifier que la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ par

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\, \mathrm{E}\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)\,,$$

où $\mathrm{E}(t)$ désigne la partie entière de t, se prolonge par continuité en une primitive dans $\mathbb{R}$ tout entier.

En effet, si x appartient à l'intervalle $\left]-\pi + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi\right[$, le nombre $(x+\pi)/(2\pi)$ appartient à $\left]k,\ k+1\right[$ et sa partie entière vaut k. Donc, sur $\left]-\pi + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi\right[$ on a

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}} + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

Alors

$$\lim_{x\to((2k+1)\pi)^+} F(x) = \lim_{x\to((2k+1)\pi)^+} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}} + \frac{2(k+1)\pi}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2(k+1)\pi}{\sqrt{3}} = \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{3}}\,,$$

et

$$\lim_{x\to((2k+1)\pi)^-} F(x) = \lim_{x\to((2k+1)\pi)^-} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}} + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}} = \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

La fonction F admet bien une limite en $(2k+1)\pi$.

21) La fonction est définie pour x dans l'ensemble $\left]-\infty,\,-1\right[\cup\left[1,\,+\infty\right[$. On pose

$$u=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,,$$

donc

$$u^2=\frac{x-1}{x+1}\,,$$

d'où l'on déduit

$$x=-\frac{u^2+1}{u^2-1}\,,$$

et donc

$$dx=\frac{4u\,du}{(u^2-1)^2}\,.$$

On calcule alors

$$\int\frac{u^2-1}{-u^2-1}\,u\,\frac{4u\,du}{(u^2-1)^2}\;=\frac{-4u^2\,du}{(u^2-1)(u^2+1)},$$

On décompose la fraction rationnelle facilement, ce qui donne

$$\frac{-4u^2}{(u^2-1)(u^2+1)}=\frac{-2}{u^2-1}-\frac{2}{u^2+1}=\frac{-2}{u^2+1}-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}\,,$$

d'où

$$\int\frac{-4u^2\,du}{(u^2-1)(u^2+1)}=\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|-2\arctan u\,,$$

et en revenant à la variable x,

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=-2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1\right)-\ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right|\,.$$

22) La fonction est définie pour $x\geq -1$. On effectue le changement de variable $u=\sqrt[6]{1+x}$. On a donc

$$x=u^6-1\quad\text{et}\quad dx=6u^5\,du\,.$$

Alors

$$\sqrt{1+x}=u^3\quad\text{et}\quad\sqrt[3]{1+x}=u^2\,.$$

On est ramené à calculer

$$\int\frac{6u^8}{1+u^2}\,du\,.$$

Or

$$u^8=u^8-1+1=(u^2+1)(u^6-u^4+u^2-1)+1\,,$$

donc

$$\begin{aligned}\int \frac{6u^8}{1+u^2}\,du &= 6\int\left(u^6-u^4+u^2-1+\frac{1}{1+u^2}\right)du\\ &= 6\left(\frac{u^7}{7}-\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}-u+\arctan u\right),\end{aligned}$$

et en revenant à la variable x,

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}\,dx = 6\left(\frac{1}{7}(x+1)^{7/6}-\frac{1}{5}(x+1)^{5/6}+\frac{1}{3}(x+1)^{3/6}-(1+x)^{1/6}+\arctan\left[(1+x)^{1/6}\right]\right).$$

23) Le trinôme x^2+2x+5 se met sous la forme canonique

$$x^2+2x+5 = 4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]$$

La fonction est définie sur $\mathbb{R}$. On pourrait effectuer un changement de variable défini par

$$\operatorname{sh} t = \frac{x+1}{2},$$

où t est un nombre réel, mais en fait on a intérêt à transformer la fonction en multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2} &= \frac{(\sqrt{x^2+2x+5}-2)^2}{x^2+2x+1}\\ &= \frac{x^2+2x+5-4\sqrt{x^2+2x+5}+4}{(x+1)^2}\\ &= \frac{(x+1)^2+8-4\sqrt{x^2+2x+5}}{(x+1)^2}\\ &= 1+\frac{8}{(x+1)^2}-4\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{(x+1)^2}.\end{aligned}$$

On remarque que ce calcul n'est valable que si $x\neq -1$. On a donc

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}\,dx = x-\frac{8}{x+1}-4\int\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{(x+1)^2}\,dx.$$

On calcule par parties l'intégrale de droite. Posons

$$u=\sqrt{x^2+2x+5} \quad\text{et}\quad v'=\frac{1}{(x+1)^2},$$

on a donc

$$u'=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} \quad\text{et}\quad v=-\frac{1}{x+1},$$

d'où

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{x+1} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} &= \int \frac{dx}{2\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}} \\
&= \ln\left(\frac{x+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\right) \\
&= \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}) - \ln 2\,.
\end{aligned}$$

Donc, à une constante près, on obtient

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}\,dx = x - \frac{8}{x+1} + 4\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{x+1} - 4\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})\,.$$

On peut transformer ce résultat, en multipliant par la quantité conjuguée du numérateur :

$$\begin{aligned}
4\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{x+1} - \frac{8}{x+1} &= 4\,\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{x+1} \\
&= 4\,\frac{(x^2+2x+5)-4}{(x+1)(\sqrt{x^2+2x+5}+2)} \\
&= 4\,\frac{(x+1)^2}{(x+1)(\sqrt{x^2+2x+5}+2)} \\
&= 4\,\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}
\end{aligned}$$

Finalement, à une constante près,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}\,dx = x - 4\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}) + \frac{4(x+1)}{2+\sqrt{x^2+2x+5}}\,,$$

et la fonction obtenue est bien continue sur $\mathbb{R}$.

Cet exercice montre que l'on peut obtenir le résultat sous de nombreuses formes.

24) La fonction est définie sur l'intervalle $]\,0,\ 2\,]$. On peut effectuer un premier changement de variable $u = 1/x$ où u appartient à l'intervalle $]\,0,\ 1/2\,[$ On est ramené à calculer

$$\int \frac{-du}{u^2\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{2}{u} - \frac{1}{u^2}}\right)} = \int \frac{-du}{1+\sqrt{2u-1}}\,.$$

Un nouveau changement de variable $t = \sqrt{2u-1}$ donne alors

$$u = \frac{1+t^2}{2} \quad \text{et} \quad du = t\,dt\,,$$

et l'on se ramène à

$$\int \frac{-t\,dt}{1+t} = \int \left(-1 + \frac{1}{1+t}\right) dt = -t + \ln(1+t)\,.$$

Comme

$$t = \sqrt{2u-1} = \sqrt{\frac{2-x}{x}}\,,$$

on obtient finalement

$$\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{2x-x^2}}\,dx = -\sqrt{\frac{2-x}{x}} + \ln\left(1 + \sqrt{\frac{2-x}{x}}\right)\,.$$

25) La fonction est définie sur l'ensemble $]-\infty,\,-3]\ \cup\ [-1,\,+\infty[$. On a alors

$$(x+1)(x+3) = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1\,,$$

et l'on effectue le changement de variable

$$x + 2 = \varepsilon \operatorname{ch} t\,,$$

où ε est le signe de $x+2$, et où t est positif. On a $dx = \varepsilon \operatorname{sh} t\,dt$ et l'on calcule

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}}{\varepsilon \operatorname{ch} t} \varepsilon \operatorname{sh} t\,dt = \int \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}\,dt\,.$$

On peut transformer la fonction en utilisant les formules de trigonométrie hyperbolique, de la manière suivante :

$$\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t} = \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} \operatorname{ch} t = \frac{\operatorname{sh}^2 t}{1 + \operatorname{sh}^2 t} \operatorname{ch} t = \operatorname{ch} t - \frac{\operatorname{ch} t}{1 + \operatorname{sh}^2 t}\,,$$

alors

$$\int \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}\,dt = \operatorname{sh} t - \arctan \operatorname{sh} t\,,$$

et puisque

$$\operatorname{sh} t = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{(x+1)(x+3)}\,,$$

on obtient finalement

$$\int \frac{\sqrt{(x+1)(x+3)}}{x+2}\,dx = \sqrt{(x+1)(x+3)} - \arctan\sqrt{(x+1)(x+3)}\,.$$

26) La fonction est définie pour x dans l'intervalle $]\,0,\,3\,[$. On a

$$4x - x^2 - 3 = 1 - (x-2)^2\,.$$

On effectue le changement de variable $x = 2 + \sin t$, avec t dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Donc $dx = \cos t\, dt$. Alors l'intégrale devient

$$\int \frac{2+\sin t}{\cos t} \cos t\, dt = \int (2+\sin t)\, dt = 2t - \cos t\,.$$

En revenant à la variable x, on obtient donc

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = 2\arcsin(x-2) - \cos(\arcsin(x-2))\,.$$

Mais

$$\cos(\arcsin u) = \sqrt{1-u^2}\,,$$

d'où

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = 2\arcsin(x-2) - \sqrt{4x-x^2-3}\,.$$

27) La fonction est définie pour x dans l'intervalle $[-1, 1]$. En multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur, on a

$$\frac{1}{\sqrt{5x+7}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{5x+7}}{x^2+5x+6} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+5x+6}\,.$$

On calcule tout d'abord

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{5x+7}}{x^2+5x+6}\, dx = \int \frac{\sqrt{5x+7}}{(x+2)(x+3)}\, dx\,.$$

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{5x+7}$. On a donc

$$x = \frac{t^2-7}{5} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2t}{5}\, dt\,.$$

Alors

$$x+2 = \frac{t^2+3}{5} \quad \text{et} \quad x+3 = \frac{t^2+8}{5}\,.$$

On se ramène au calcul de

$$\int \frac{10t^2\, dt}{(t^2+3)(t^2+8)}\,,$$

La fraction rationnelle se décompose facilement sous la forme

$$\frac{10t^2}{(t^2+3)(t^2+8)} = \frac{16}{t^2+8} - \frac{6}{t^2+3}\,,$$

d'où

$$\int \frac{10t^2\, dt}{(t^2+3)(t^2+8)} = 4\sqrt{2}\arctan\frac{t}{2\sqrt{2}} - 2\sqrt{3}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\,.$$

Donc
$$I_1 = 4\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{5x+7}}{2\sqrt{2}} - 2\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{5x+7}}{\sqrt{3}}\,.$$

On calcule ensuite
$$I_2 = \int \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x^2+5x+6}\,dx\,.$$
On effectue un premier changement de variable $x = \cos u$ avec u dans $[\,0,\,\pi\,]$.
On a donc $dx = -\sin u\,du$ et l'intégrale devient
$$\int \frac{\sin^2 u}{(\cos u+2)(\cos u+3)}\,du\,.$$
Mais, en effectuant le changement de variable $t = \tan(u/2)$, la variable t est positive et l'on a
$$u = 2\arctan t \quad \text{et} \quad du = \frac{2\,dt}{1+t^2}\,,$$
donc l'intégrale devient
$$\int \frac{\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2 \dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+2\right)\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+3\right)} = \int \frac{4t^2\,dt}{(t^2+3)(t^2+1)(t^2+2)}\,.$$
La fraction rationnelle se décompose sous la forme
$$\frac{4t^2}{(t^2+3)(t^2+1)(t^2+2)} = \frac{A}{t^2+1} + \frac{B}{t^2+2} + \frac{C}{t^2+3}\,.$$
On obtient A en multipliant par t^2+1 et en remplaçant t^2 par -1. On trouve $A = -2$. De même, en multipliant par t^2+2, et en remplaçant t^2 par -2, on obtient $B = 8$, et enfin en multipliant par t^2+3, et en remplaçant t^2 par -3, on obtient $B = -6$, d'où la décomposition
$$\frac{4t^2}{(t^2+3)(t^2+1)(t^2+2)} = \frac{-2}{t^2+1} + \frac{8}{t^2+2} - \frac{6}{t^2+3}\,.$$
En intégrant, cela donne
$$\int \frac{4t^2\,dt}{(t^2+3)(t^2+1)(t^2+2)} = -2\arctan t + 4\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{3}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\,.$$
Mais
$$x = \cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,$$
et l'on en déduit que
$$x(1+t^2) = 1-t^2\,,$$

puis que

$$t^2(x+1) = 1 - x\,,$$

donc

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,.$$

Alors

$$I_2 = -2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{2(1+x)}} - 2\sqrt{3}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{3(1+x)}}\,.$$

Finalement la primitive cherchée vaut

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{5x+7}+\sqrt{1-x^2}}\,dx &= 4\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{5x+7}}{2\sqrt{2}} - 2\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{5x+7}}{\sqrt{3}} \\ &\quad -2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{2(1+x)}} - 2\sqrt{3}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{3(1+x)}}\,.\end{aligned}$$

28) La fonction est définie si $x > 1$. On peut utiliser le changement de variable $x = \operatorname{ch}^2 u$ avec $u > 0$. Alors

$$x - 1 = \operatorname{sh}^2 u \quad \text{et} \quad dx = 2\operatorname{ch} u \operatorname{sh} u\, du\,.$$

L'intégrale devient

$$\int (\operatorname{ch} u + 1) 2\operatorname{ch} u\, du\,.$$

Et en utilisant les formules de trigonométrie hyperbolique

$$2\operatorname{ch}^2 u = 1 + \operatorname{ch} 2u \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} 2u = 2\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int (\operatorname{ch} u + 1) 2\operatorname{ch} u\, du &= \int (1 + \operatorname{ch} 2u + 2\operatorname{ch} u)\, du \\ &= u + \frac{\operatorname{sh} 2u}{2} + 2\operatorname{sh} u \\ &= u + \operatorname{sh} u(\operatorname{ch} u + 2)\,.\end{aligned}$$

Mais

$$\operatorname{sh} u = \sqrt{x-1} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} u = \sqrt{x}\,,$$

donc

$$e^u = \operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u = \sqrt{x-1} + \sqrt{x}\,.$$

Alors, en revenant à la variable x,

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) + \sqrt{x-1}(\sqrt{x}+2)\,.$$

29) La fonction est définie si $x > 0$. On intègre par parties.

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2\sqrt{1+x}\,\ln x - 2\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx\,.$$

On pose alors $u = \sqrt{1+x}$, donc

$$x = u^2 - 1 \quad \text{et} \quad dx = 2u\,du\,,$$

et l'intégrale

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$$

se transforme en

$$\int 2\,\frac{u^2\,du}{u^2-1} = \int \left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = 2u + \ln|u-1| - \ln|u+1|\,.$$

D'où, en revenant à la variable $x \geq 0$,

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2\sqrt{1+x}\,\ln x - 4\sqrt{1+x} - 2\ln(\sqrt{x+1}-1) + 2\ln(\sqrt{x+1}+1)\,.$$

30) La fonction est définie pour x dans l'intervalle $[-1,\,1]$. On intègre par parties.

$$\int x^2 \arcsin x\,dx = \frac{x^3}{3}\arcsin x - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{1-x^2}$, on a

$$x = \sqrt{1-u^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{-u\,du}{\sqrt{1-u^2}}\,,$$

et l'intégrale

$$\int \frac{x^3}{3}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

devient

$$\int \frac{(1-u^2)\sqrt{1-u^2}}{3u}\,\frac{-u\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{u^2-1}{3}\,du = \frac{u^3}{9} - \frac{u}{3} = \frac{u}{9}(u^2-3)\,.$$

D'où, en revenant à la variable x

$$\int x^2 \arcsin x\,dx = \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\,.$$

31) a) On calcule la primitive en écrivant la fonction f en fonction de $\tan(x/2)$. On a

$$\frac{1}{2+\sin x} = \frac{1}{2+\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)}{\tan^2\dfrac{x}{2}+\tan\dfrac{x}{2}+1}\,.$$

Si l'on pose $t=\tan(x/2)$, on a alors

$$dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\,dx\,,$$

et l'intégrale $\displaystyle\int f(x)\,dx$ devient $\displaystyle\int\frac{dt}{t^2+t+1}$, ce qui, donne par la formule d'intégration de l'inverse d'un trinôme du second degré sans racine réelle,

$$\int\frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\,.$$

Alors

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\,.$$

Cette fonction F est définie lorsque $\tan(x/2)$ est définie, c'est-à-dire si $x/2$ est différent de $\pi/2+k\pi$. Donc le domaine de définition de F est

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\,.$$

b) La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier car son dénominateur ne s'annule jamais. Elle possède donc une primitive continue dans $\mathbb{R}$ et en particulier dans l'intervalle $]-\pi,\,3\pi[$. On a donc

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+K_1 & \text{si } -\pi<x<\pi \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+K_2 & \text{si } \pi<x<3\pi \end{cases}$$

La fonction G étant continue en π, on doit donc avoir

$$G(\pi) = \lim_{x\to\pi^-}F(x)+K_1 = \lim_{x\to\pi^+}F(x)+K_2$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}}+K_1 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}+K_2\,.$$

En prenant par exemple $K_1=0$, on trouve $K_2=2\pi\sqrt{3}$, et l'on obtient la primitive G suivante :

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} & \text{si } -\pi < x < \pi \\ \\ \dfrac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{si } x = \pi \\ \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{si } \pi < x < 3\pi \end{cases}$$

c) Alors

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\pi/2}^{2\pi} f(x)dx &= G(2\pi) - G(\pi/2) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan\pi+1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan\frac{\pi}{4}+1}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{3} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{5\pi}{3\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

32) On intègre par parties, en posant

$$v(x) = \arctan \frac{x-1}{x+2} \quad \text{et} \quad u'(x) = x\,.$$

on a

$$v'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^2} = \frac{3}{(x+2)^2+(x-1)^2} = \frac{3}{2x^2+2x+5}\,,$$

et

$$u(x) = \frac{x^2}{2}\,.$$

D'où

$$\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} \arctan \frac{x-1}{x+2} - \frac{3}{2} \int \frac{x^2\,dx}{2x^2+2x+5}\,.$$

D'autre part, en décomposant la fraction et en faisant apparaître la dérivée du dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{2x^2+2x+5} &= \frac{1}{2} - \frac{x+\dfrac{5}{2}}{2x^2+2x+5} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{4x+2}{2x^2+2x+5} - \frac{2}{2x^2+2x+5}\,.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int \frac{x^2\,dx}{2x^2+2x+5} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5) - \frac{2}{3}\arctan\frac{2x+1}{3}\,,$$

et finalement

$$\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\ \arctan\frac{x-1}{x+2} - \frac{3x}{4} + \frac{3}{8}\ln(2x^2+2x+5) + \arctan\frac{2x+1}{3}\,.$$

33) a) En faisant apparaître la dérivée du dénominateur, on obtient

$$\frac{x+8}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+3} + \frac{7}{x^2+2x+3}\,.$$

D'où

$$\int \frac{x+8}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{7}{\sqrt{2}}\ \arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}\,.$$

b) On effectue tout d'abord la division euclidienne de x^4+1 par x^3+2x^2+3x. On a donc

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
x^4 & & & & +1 & x^3 & +2x^2 & +3x \\ \cline{6-8}
-x^4 & -2x^3 & -3x^2 & & & x & -2 & \\ \cline{1-3}
 & -2x^3 & -3x^2 & & & & & \\
 & 2x^3 & +4x^2 & +6x & & & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +6x & +1 & & &
\end{array}$$

ce qui donne

$$g(x) = x - 2 + \frac{x^2+6x+1}{x(x^2+2x+3)}\,.$$

Par ailleurs

$$1 + 6x + x^2 = \frac{1}{3}\,(3+2x+x^2) + \frac{2x}{3}\,(x+8)\,,$$

et donc

$$g(x) = x - 2 + \frac{1}{3x} + \frac{2}{3}f(x)\,.$$

Alors

$$\int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln(x^2+2x+3) + \frac{7\sqrt{2}}{3}\ \arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}\,.$$

34) a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour trouver une primitive, on la décompose en éléments simples sous la forme

$$f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}\,.$$

EM 26

Le nombre a est le rapport des termes de plus haut degré de f. Donc $a = 1$.
Le nombre b, est la limite en zéro de $xf(x)$ On obtient $b = 1$. Donc

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}\,.$$

Alors

$$f(-1) = 0 = d - c \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{2}{3} = 2 + \frac{c+d}{3}\,.$$

On en tire immédiatement $c = d = -2$. Finalement

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,,$$

et en faisant apparaître la dérivée du dénominateur de la fraction de droite

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\,,$$

Ce qui s'intègre directement :

$$\int f(x)\,dx = x + \ln|x| - \ln(x^2+x+1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\,.$$

b) La fonction g est définie pour t distinct de $k\pi/2$ où k est entier. Pour déterminer quel changement de variable utiliser, regardons l'élément différentiel

$$g(t)\,dt = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t \cos^2 t}\,\frac{2 - \sin 2t}{2 + \sin 2t}\,dt\,,$$

Si l'on calcule $g(\pi + t)d(\pi + t)$ on obtient

$$\begin{aligned} g(\pi+t)d(\pi+t) &= \frac{\sin(\pi+t) + \cos(\pi+t)}{\sin(\pi+t)\cos^2(\pi+t)}\,\frac{2 - \sin 2(\pi+t)}{2 + \sin 2(\pi+t)}\,d(\pi+t) \\ &= \frac{-\sin t - \cos t}{-\sin t \cos^2 t}\,\frac{2 - \sin 2t}{2 + \sin 2t} dt\,. \end{aligned}$$

Donc

$$g(\pi+t)d(\pi+t) = g(t)dt\,.$$

L'élément différentiel étant invariant par le changement de t en $\pi + t$, on peut exprimer $g(t)\,dt$ sous la forme $h(\tan t)\,d(\tan t)$, et donc, utiliser le changement $x = \tan t$. En remarquant que

$$d(\tan t) = \frac{dt}{\cos^2 t}\,,$$

transformons en fonction de $\tan t$ l'expression

$$k(t) = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t}\,\frac{2 - \sin 2t}{2 + \sin 2t}\,.$$

En utilisant la relation

$$\sin 2t = \frac{2\tan t}{1 + \tan^2 t}\,,$$

et en mettant $\cos t$ en facteur au numérateur, on obtient

$$\begin{aligned}
k(t) &= \frac{\cos t}{\sin t}\left(\frac{\sin t}{\cos t}+1\right)\frac{2-\dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t}}{2+\dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t}} \\
&= \frac{\tan t+1}{\tan t}\,\frac{\tan^2-\tan t+1}{\tan^2+\tan t+1} \\
&= \frac{\tan^3 t+1}{\tan t(\tan^2+\tan t+1)} \\
&= f(\tan t)\,.
\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\int g(t)\,dt = \int f(\tan t)\,d(\tan t)\,,$$

et il résulte de a) que

$$\int g(t)\,dt = \tan t + \ln|\tan t| - \ln(\tan^2 t+\tan t+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan t+1}{\sqrt{3}}\,.$$

35) Commençons par décomposer en éléments simples la fraction f. Elle se met sous la forme

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}\,.$$

Le coefficient a est le rapport des termes de plus haut degré donc $a = 1$.
Pour obtenir b, on multiplie par $x+1$, et l'on fait tendre x vers -1. On obtient

$$b = \lim_{x\to -1}((x+1)f(x)) = \lim_{x\to -1}\frac{x^3+x+1}{x^2+x+1} = -1\,.$$

Donc

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}\,.$$

On obtient le coefficient d en donnant à x la valeur 0. Donc

$$f(0) = 1 = d\,,$$

et

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{cx+1}{x^2+x+1}\,.$$

Enfin, en prenant la valeur $x = 1$

$$f(1) = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{c+1}{3}$$

donne immédiatement $c = -1$. Finalement

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1}\,.$$

Il reste à décomposer le terme de droite pour faire apparaître la dérivée du dénominateur :
$$\frac{-x+1}{x^2+x+1} = -\frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}\,,$$
et donc
$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}\,.$$
On obtient alors, sur $\mathbb{R}^*$, la primitive
$$F(x) = x - \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\,.$$
Regardons maintenant l'élément différentiel $g(x)\,dx$. Si l'on change x en $\pi - x$, on obtient facilement
$$g(\pi - x)\,d(\pi - x) = -g(\pi - x)\,dx = g(x)\,dx\,,$$
et donc on peut écrire $g(x)$ sous la forme $h(\sin x)\cos x$. En effet
$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2\sin x\,\cos x(1+\sin^2 x) + 2\cos x}{(\sin x+1)(1+\sin x+\sin^2 x)} \\ &= \frac{2\sin x(1+\sin^2 x)+2}{(\sin x+1)(1+\sin x+\sin^2 x)}\cos x \\ &= 2f(\sin x)\cos x\,. \end{aligned}$$
Le changement de variable $t = \sin x$ ramène donc au calcul précédant, et g a pour primitive G définie par
$$G(x) = 2F(\sin x)\,,$$
pour $x \neq -\pi/2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

36) a) La fonction f est définie sur l'intervalle $I = [\,0,\,1\,[$. L'application $t \mapsto \sin^2 t$ est une bijection de $[\,0,\,\pi/2\,[$ sur I, et l'on a alors, si x est dans I,
$$t = \arcsin\sqrt{x}\,.$$
On suppose donc t dans $[\,0,\,\pi/2\,[$. Alors $\tan t$ est positive et
$$f(\sin^2 t) = \frac{1}{1-\sin^2 t}\sqrt{\frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}} = \frac{1}{\cos^2 t}\tan t\,.$$
On a aussi
$$dx = 2\sin t\cos t\,dt\,.$$
On est donc ramené à calculer
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^2 t}\tan t\,(2\sin t\cos t)\,dt &= 2\int \tan^2 t\,dt \\ &= 2\int (1+\tan^2 t)\,dt - 2\int dt \\ &= 2\tan t - 2t\,, \end{aligned}$$

et l'on obtient comme primitive de f la fonction

$$F(x) = 2\tan(\arcsin\sqrt{x}) - 2\arcsin\sqrt{x}\,.$$

Mais, puisque $\arcsin u$ appartient à l'intervalle $[-\pi/2,\ \pi/2]$, son cosinus est positif, donc

$$\cos\arcsin x = \sqrt{1-\sin^2\arcsin x} = \sqrt{1-x^2}\,,$$

et

$$\tan\arcsin x = \frac{\sin\arcsin x}{\cos\arcsin x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Alors

$$\tan(\arcsin\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,.$$

On obtient finalement

$$F(x) = 2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\arcsin\sqrt{x}\,.$$

b) Si l'on pose $u = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ pour x dans I, on obtient

$$x = \frac{u^2}{1+u^2}\,,$$

donc

$$dx = \frac{2u\,du}{(1+u^2)^2}\,.$$

Par ailleurs

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\dfrac{u^2}{1+u^2}} = 1+u^2\,.$$

On est donc ramené au calcul de

$$\int u(1+u^2)\frac{2u\,du}{(1+u^2)^2} = \int\left(2-\frac{2}{1+u^2}\right)du = 2u - 2\arctan u\,.$$

Donc on obtient comme primitive

$$G(x) = 2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,.$$

On obtient deux primitives de la même fonction. Elles diffèrent donc d'une constante. Alors $F-G=K$, mais en zéro, on a

$$K = F(0) - G(0) = 0\,.$$

Les fonctions F et G sont donc les mêmes.

EM 30

On a tout d'abord

$$I = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = 2\left(1 - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}\,.$$

On a également

$$I = G\left(\frac{1}{2}\right) - G(0) = 2(1 - \arctan 1) = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}\,.$$