guide_pharmacie@yahoo.fr

Université de Batna
Faculté de Médecine
Département de Pharmacie

2005/2006

Cours de Mathématiques

1ère Année Pharmacie

Chapitre I : Fonction réelle d'une variable réelle

D'après le cahier de :

I. Hadef

Created by: T. Djebaili

Partie I : Rappels et notions mathématiques :

chapitre 1 : Fonctions réelles d'une variable réelle :

Dans ce chapitre $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réelles.

1. Fonctions réelles d'une variable réelle

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$ ($\emptyset = E \subset \mathbb{R}$)

On appelle fonction numerique sur E toute application :

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x).$$

* Fonction paire, impaire et périodique :

Soit f une fonction définie sur I :

$F : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

- I est symetrique par rapport à 0.
  - f est dite paire si : $\begin{cases} f(-x) = f(x). \\ \forall\, x \in I. \end{cases}$
  - f est dite impaire si : $\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ \forall\, x \in I. \end{cases}$
- f est dite periodique s'il esciste $\lambda > 0$ telque $f(x+\lambda) = f(x)$

Ex : * Les fonctions : $x \longrightarrow x^2$, $x \longrightarrow \cos(x)$ sont paires.

* Les fonctions : $x \longrightarrow x^3$, $x \longrightarrow \tan(x)$ sont impaires.

* Fonctions monotones :

$f \; E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- f est dite monotone croissante dans E si :

$\forall (x, y) \in E^2 : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

- f est dite monotone décroissante dans E si :

$\forall (x, y) \in E^2 : x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

* Limites d'une fonction :

Soit : $f : E \rightarrow \mathbb{R} / E \subset \mathbb{R}$. Telle que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset E$ pour $\alpha > 0$.

définiton : on dit que f a une limite l au point x_0 et on note : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$

si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\Rightarrow$

$f(x) - l < \varepsilon$.

- Si : $l = \pm \infty$ on dit que la limite est infinie.
- La limite lorsqu'elle existe est unique.

$|f(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < (f(x) - l) < \varepsilon$

$l - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + l$.

$f(x) \in]l - \varepsilon, \varepsilon + l[$

- Operations sur les limites

soit $f, g : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_0$

1- $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l + l_0$

2- $\lim_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$.

3- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot l_0$

4- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l_0}$.

- on resone par fois le problème par des transformations élémentaires : esc :

$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \frac{0}{0}$.

$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a}{x^3 - a} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{(x-a)}(x^2 + ax + a^2)} = \frac{2}{3a}$

* Continuité des fonctions:

soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

I est intervale de $\mathbb{R}$.

on dit que f est continue en $x_0 \in I$ si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

c'est a dire :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \,/\, (x - x_0) < \alpha \Rightarrow f(x) - f(x_0) < \varepsilon$.

- Une fonction définie sur un intervale I est dite contenue en toute point de I

Ex : * $x \longrightarrow x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

* $x \longrightarrow \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ toute fraction rationnelle est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ avec $Q(x) \neq 0$.

- Operations sur les fonctions continues :

$F : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$

f est g sont des fonctions continues en x_0 alors $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), $f \times g$, f/g sont des fonctions continues en x_0.

* fonctions dérivables :

1- dérivée d'une fonction :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.

Cette limite est appelée la dérivée de f au point x_0 et notée : $f'(x_0)$, $\dfrac{d f(x_0)}{dx}$.

Remarque : définition précédente :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x) \text{ avec : } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

. f est dérivable en $x_0 \iff \begin{cases} f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\left[f'(x_0) + \varepsilon(x)\right] \\ \lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$

2- dérivée à droite et à gauche : on définie :

$$* \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$$

$$* \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$$

$f'_d(x_0)$ dérivée à droite - $f'_g(x_0)$ dérivée à gauche.

f est dérivable $\Rightarrow f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

3. Opérations sur les fonction dérivables :

Soit f, g sont définis sur un même intervalle I et si f, g sont dérivables au point x_0 on a :

$f+g$, λf, $f \cdot g$ et f/g sont aussi dérivables au x_0

1. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3. $(f g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0)$.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2}$
5. $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$.

$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0)$.

Remarque : Toute fonction dérivable au point x_0 est continue en x_0 et l'inverse n'est pas juste

ex : $x \longrightarrow |x|$ continue en 0, et non dérivable.

$f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$ définie sur $[-1, +\infty[$

pour étudié l'existence de la derivée au point 0 :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{|x|\sqrt{x+1}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{|x|\sqrt{x+1}}{x} = -1$$

$f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ donc f n'est pas derrivable au 0

4- Derivées d'ordre superieur :

Definition : Soit f une fonction derrivable sur I / I ⊂ R, f' sa derivée. si la fonction f' admet a son tour une fonction dérivée : $(f')' = f''$. Celle ci est dite derivée d'ordre 2 (derivée second). On definé par récurrence les derivées successives de f la derivée n ième ou derivée d'ordre n notée $f^{(n)}$:

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

5- Règle de l'Hopitol :

Si f et g sont 2 fonctions derivables dans l'intervalle I : $]a-h, a+h[$, $h > 0$.

si : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ alors : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$

EX :

$$\lim_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{\sin x - \sin a} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\cos x'}{\sin x'} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} -\tan(x) = -\tan(a).$$

Fonctions réciproque :

Théorème : soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement monotone, alors il existe une fonction notée f^{-1}, appelée fonction réciproque de f définie : continue et strictement monotone sur l'intervalle $f([a, b])$ et on a :

$\forall x \in [a, b],\ f^{-1}[f(x)] = x,\ y \in f([a, b])$

$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Graphiquement les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétrique par rapport à la droite $y = x$.

Si f est dérivable au point $x_0 \in [a,b]$, $f'(x_0) \neq 0$. alors $f^{-1}[f x_0] = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

$f(x_0) = y_0, (f^{-1})' y_0 = \dfrac{1}{y_0}$.

Fonctions usuelles et leur réciproques :

1 - Fonction logarithme :

On appelle logarithme neperien et on note ln l'application : $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.
$x \longmapsto \ln(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \ln x = \displaystyle\int^x \frac{dr}{r} \;/\; \ln 1 = 0$.

ln c'est fonction définie continue strictement croissante et derivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriétés :

* $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
* $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : \ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$.
* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha > 0 : \ln(x)^\alpha = \alpha \ln(x)$.
* $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x}$.

Limites :

- $\underset{x \to +\infty}{\ln x \to +\infty}$
- $\underset{x \to 0^+}{\ln x \to -\infty}$
- $\underset{x \to +\infty}{\dfrac{\ln x}{x} \to 0}$
- $\underset{x \to 0^+}{x \ln x \to 0}$

Remarque : puisque Ln est continue, strictement croissante, alors ln admet un fonction réciproque appelée exponentielle.

2. Fonction exponentielle.

e^x est la réciproque de $\ln x$.

$e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$

$\quad x \longrightarrow e^x$.

c'est une fonction continue dérivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

$(e^x)' = e^x$. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+$:

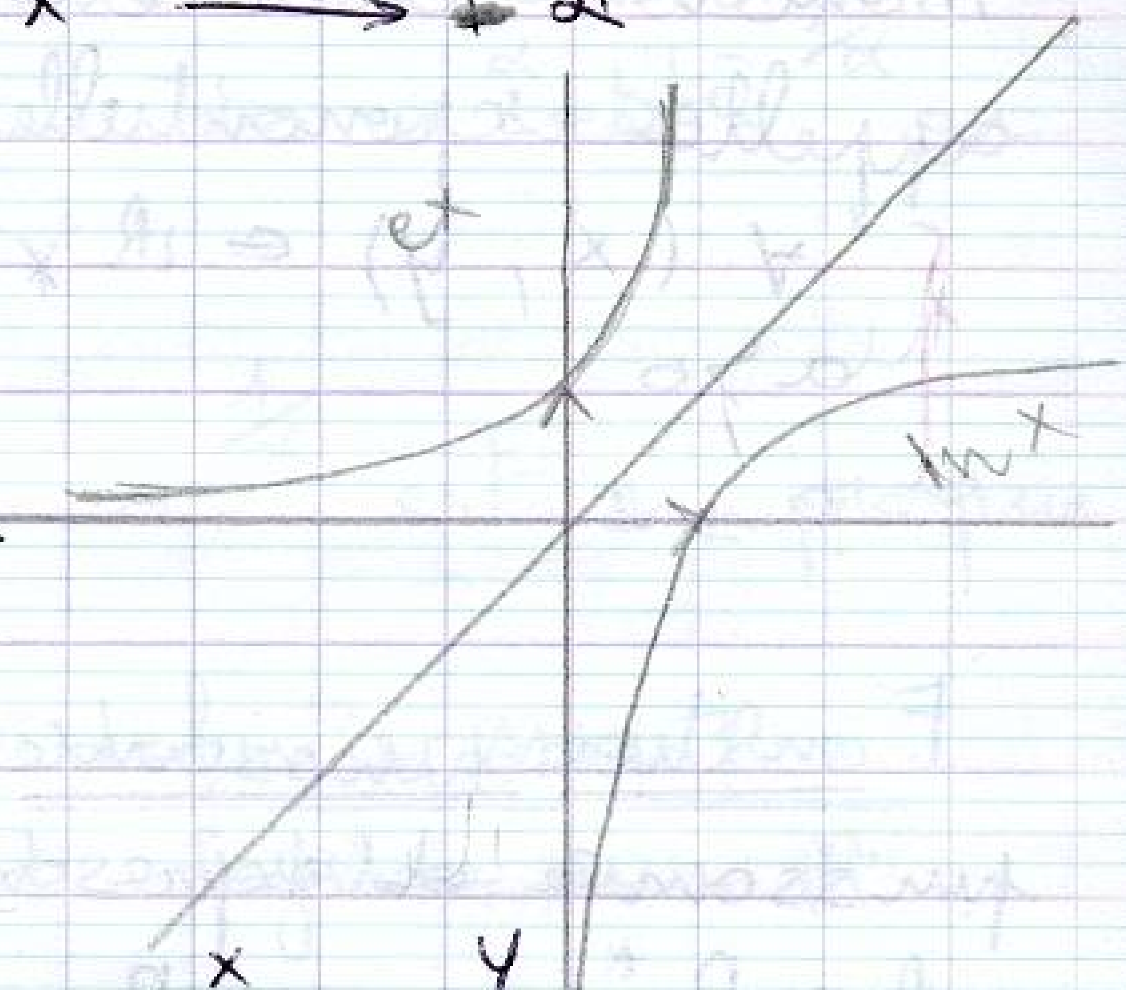
$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

Limites:

- $\underset{x \to +\infty}{e^x \to +\infty}$
- $\underset{x \to -\infty}{e^x \to 0}$

- $\dfrac{e^x}{x} \longrightarrow +\infty$ - $xe^x \longrightarrow 0$

$x \longrightarrow +\infty$ $x \longrightarrow -\infty$



Propriétés :

- $\forall x > 0 : e^{\ln x} = x$.
- $\forall x \in R : \ln e^x = x$.
- $e^0 = 1 : \ln 1 = 0$.

3/ Logarithme :

- $\forall x, y \in R : e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

$\forall x, y \in R : e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

- $\forall x, y \in R : (e^x)^y = e^{x \cdot y}$
- $\forall x \in R, (e^x)' = e^x, \forall x \in N^* : (e^x) = e^x$.

3/ Logarithme et exponentielle de base a :

on peut definir des logarithmes de base a, $a > 0$ et $a \neq 1$. et on note : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. les plus utilisés sont les logarithme decimale de base $a = 10$ et note simplement log. $\log_a^x$ est continue et strictement monotone donc elle admet une fonction réciproque appellée exponentielle de base a. $a^x = e^{x \ln a}$

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* : \quad y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y = \frac{\log y}{\log a} \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

Fonction puissance : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ on appelle puissance d'exposant α la fonction :

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^\alpha.$$

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

c'est une fonction definie continue dérivable.

- $\forall x > 0 \quad f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$
- $\alpha < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow x^\alpha \searrow$

  $\alpha = 0 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0.$

  $\alpha > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$

Limites

- $$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha \begin{cases} +\infty & \alpha > 0. \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

• $x^{\alpha} \xrightarrow[x \to 0]{} \begin{cases} +\infty & \alpha < 0 \\ 0 & \alpha > 0 . \end{cases}$

La fonction réciproque de x^{α} est $x^{1/\alpha}$ ou $\sqrt[\alpha]{x}$.

Remarque :

* Pour $x \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt[x]{x} = x^{1/x}$ est réciproque de la fonction x^x.
* Si x est pair $\sqrt[x]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
* Si x est impair $\sqrt[x]{x}$ est définie sur $\overset{+}{\mathbb{R}}$.
* x^x est définie sur $\mathbb{R}$.

Croissance comparée des fonction e^x, x^{α}, $\ln x$

* $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*_+$, $\dfrac{e^x}{x^{\alpha}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
* $\dfrac{e^x}{\ln x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
* $\dfrac{x^{\alpha}}{(\ln x)^B} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, $\forall \alpha > 0$, $\forall B > 0$
* $x^{\alpha} (\ln x)^B \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

Etude générale de la fonction $y = f(x)$.

1/ Intervalle d'étude I :

a/ intervalle de définition.

b/ Symetrie et périodes.

c/ Intervalles reduit I.

2/ variations :

a/ Calcul de la derivée f'

b/ Valeur qui annulent f et f' !

c/ Tableau provisoire.

* Calcul f' :

- $f' > 0 \Rightarrow f \nearrow$
- $f' < 0 \Rightarrow f \swarrow$
- $f' = 0$ et change de signe $\Rightarrow$ extremum.

si de plus $f'' = 0$ et change de signe de signe $\Rightarrow$ point d'inflexion

3/ étude aux bornes (determiner les asymptotes)

- $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty \Rightarrow$ asymphotes verticales $x = x_0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a \Rightarrow$ asymphotes horizontale $y = a$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ branche infinie

4/

a/ Compléter le tableau de variation.

b/ tracer le graphe.

Calcul integrale, Calcul primitif :

1/ Integrale simple de Rieman :

L' integrale de Rieman est la plus simple à defini cette notion se rattache à la notion intuitive d' aire : L'integrale d'une fonction f continue sur $[a, b]$ mesure l' aire de la portion du plan comprise entre la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et le droites $x = a$, $x = b$ et on note $\int_a^b f(x)\,dx$

Théoreme : Toute fonction $f\ [a, b] \to \mathbb{R}$ continue est integrale.

Propriétés de l' integrale :

Les fonctions f et g étant integrales sur $[a, b]$ on a :

1/ $\forall c \in [a, b] : \int_c^c f(x)\,dx = 0$.

2/ $\forall c \in [a, b] : \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

3/ $\forall c, d \in [a, b] : \int_c^d f(x)\,dx = -\int_d^c f(x)\,dx$.

4/ $\forall \alpha, B \in \mathbb{R} : \int_a^b \alpha f(x) + B g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + B \int_a^b g(x)\,dx$

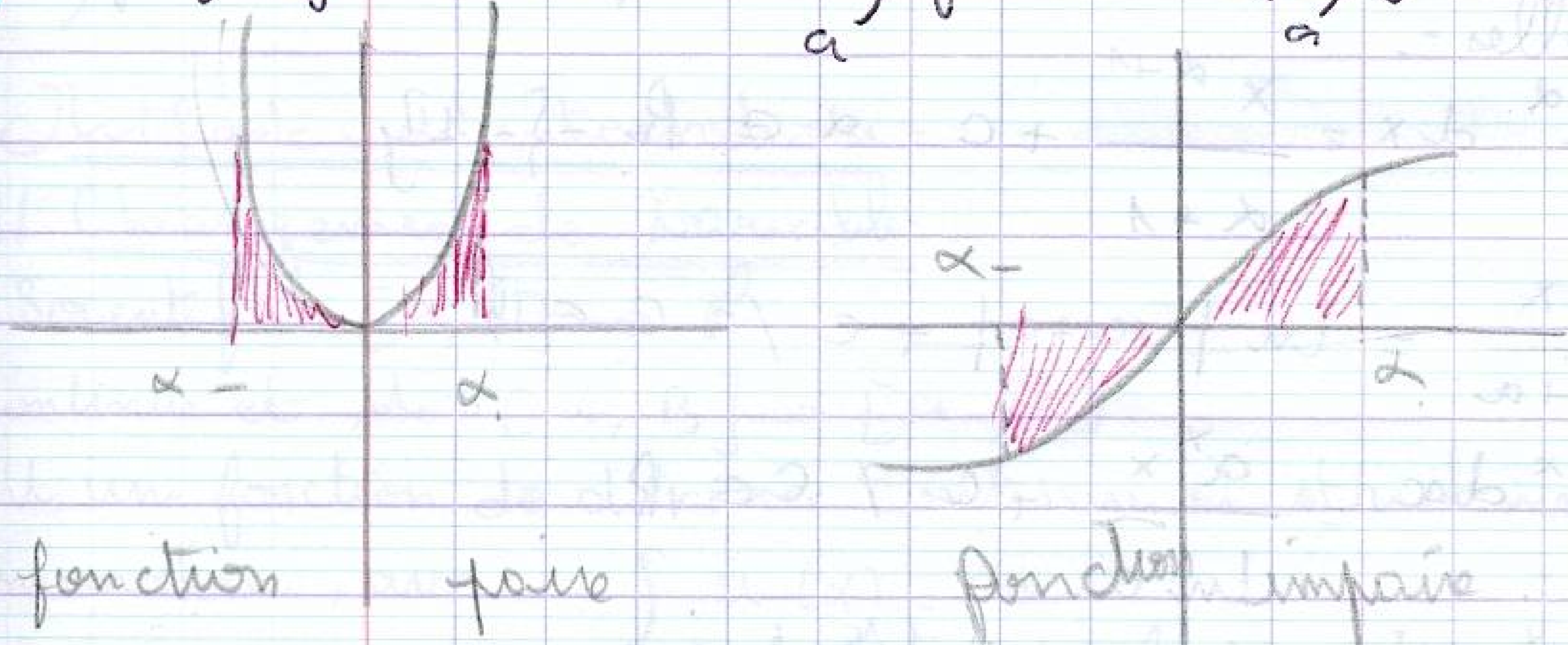
5/ Si f est paire alors :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,d(x) = 2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \;/\; [-\alpha, \alpha] \subset [a, b]$$

6/ Si f est impaire $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$.

7/ Si $f>0$ sur $[a, b] \Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)\,dx > 0$

8/ Si $f<g$ sur $[a, b] \Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)\,dx < \int_{a}^{b} g(x)\,dx$.



2/ Calcul des primitives

Définition: On appelle primitive d'une fonction f définie sur un intervelle J, toute fonction F dérivable sur J telle que : $F'(x) = f(x)$.

c'est à dire $dF(x) = f(x)\,d(x)$.

On la note : $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

Les primitives dit intégrale indéfinie de f

Proposition: Si F est primitives de f on a

$$\int_a^b f(x)\, d(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Théorème : toute fonction définie et continue sur I admet des primitives sur I.

Primitives usuelles : Voici les primitives des fonctions usuelles :

- $\int x^\alpha \, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
- $\int \dfrac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + c \ / \ c \in \mathbb{R}$
- $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \ / \ c \in \mathbb{R}$
- $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2} \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$.

- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan g\, x + c$

- $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$

Methodes d'integrations :

1/ Changement de variable

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

continue et $u : [\alpha, B] \to [a, b]$.

u une fonction de dérivée continue et strictement monotone, avec :
$$\begin{cases} u(\alpha) = a \\ u(B) = b. \end{cases}$$

en effectuant dans l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ le changement de variable $x = u(t)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^B f[u(t)]\, u'(t)\,dt.$$

ex : $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{a^2} + 1} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}$

on pose $t = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a t$.

$dx = d(at) = a\,d(t)$

$\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\arctan t + C$

$= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

2/ Integrals par décomposition :

ex :

1/ $\int (1-\sqrt{x})^2\,dx = \int 1 - 2\sqrt{x} + x)\,dx$

$= \int dx - 2\int \sqrt{x} + \int x\,dx$

$= x - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + C$

2/ $\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)} = \int \frac{\alpha}{1-x} + \frac{B}{1+x}\,dx$

par correspondance $\alpha = B = \frac{1}{2}$

$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} = \frac{-1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln$

$|x+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$

3/ Integrations par partie

Si f et g sont 2 fonctions intégrales sur [a, b].

$$\int_a^b f\,dg = (fg)_a^b - \int_a^b df\cdot g$$

* : $\int_0^1 \arctan x\,dx$ / $\begin{cases} f(x) = \arctan x \\ dg = dx \end{cases}$

$$\begin{cases} df = \dfrac{dx}{1+x^2} = f'(x)\,dx \\ g(x) = x \end{cases}$$

$$\int_0^1 \arctan x\,dx = \left[x\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \left[x\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 + C$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

* Primitives usuelles des quelque fonction qui s'aposent de changer le variable:

- $\int u(x)\, u'(x)\, dx = \frac{1}{2} u^2(x) + C$
- $\int u^{\alpha}(x)\, u'(x)\, dx = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$
- $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \ln|u(x)| + C$
- $\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\, dx = \sqrt{u(x)} + C$
- $\int e^{u(x)} \times u'(x)\, dx = e^{u(x)} + C$
- $\int \sin[u(x)] \times u'(x)\, dx = -\cos(u(x)) + C$
- $\int \cos[u(x)] \cdot u'(x)\, dx = \sin(u(x)] + C$
- $\int u'(v(x))\, v'(x)\, dx = u(v(x)) + C$

4/ Integration des fractions rationnelles :

Definition : On appelle une fraction rationnelle toute fonction de la forme : $\frac{P(x)}{Q(x)}$, P et Q sont 2 polynomes a cofficient reelles.

$$\begin{cases} P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n. \\ a_n \neq 0. \end{cases}$$

p est un polynome de degré n $\deg(p) = n$.

* pour calculer les primitive d'une fraction qui se presente sous la forme : $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q \neq 0$.

On procede d'abord à décomposition de $R(x)$ en element simple dans $\mathbb{R}$.
ensuite, on integre separement les éléments simples

* $\begin{cases} p > 1 : \int \frac{dx}{(x-\alpha)^p} = \frac{1}{1-p} \frac{1}{(x-\alpha)^{p-1}} + C \\ \alpha = cte \\ x \in \mathbb{R} - \{\alpha\} \end{cases}$

* $p = 1 : \int \frac{dx}{(x-\alpha)} = \ln|x-\alpha| + C$

ex : $I(x) = \int \frac{1}{x^3(x+1)} dx$

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\gamma}{x^3} + \frac{\lambda}{(x+1)}$$

$$= \frac{\alpha x^2(x+1) + Bx(x+1) + (x+1)\gamma + x^3\lambda}{x^3(x+1)}.$$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \alpha = 1 \\ B = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)}$$

$$\Rightarrow I(x) = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^3} - \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow = \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \ln|x+1| + C$$

$$* \; I(x) = \int \frac{x^3-1}{x-1}\,dx \,. = \int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}\,dx$$

$$= \int x^2 + x + 1 \; dx \,. = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C.$$

$$* \; I(x) = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{d(x)}{x^2 + \frac{2x}{2} + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}$$

$$= \int \frac{d(x)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{d(x)}{\frac{3}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}} + 1\right)}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{d(x)}{\frac{4}{3}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\int \frac{d(x)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\;\frac{2x+1}{2}\right)^2+1}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{d(x)}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$ On pose $y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}\,y - 1}{2} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dy.$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,dy}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan y + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

5/ Fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$.

Pour calculer $\int R(\sin x + \cos x)\,dx$
où R designe une fonction rationnelle, de 2 variables. On devra effectuer un changement de variable, le plus souvent utiliser, on prendre

$t = \tan \frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

proposition : (Règle de Bioche).

soit à calculer : $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ on note

$w(x) = R(\sin x + \cos x)\,dx$

appelé élément différentiel de la primitive demandée.

1/ si $w(-x) = w(x)$ alors on pourra par le changement de variable $t = \cos x$

2/ si $w(\pi - x) = w(x)$.

on pourra utiliser $t = \sin x$.

3/ si $w(\pi + x) = w(x)$.

on pourra utiliser $t = \tan x$.

exemple :

$I = \int \frac{\sin^5 x}{\cos x}\,dx$.

$w(x) = \frac{\sin^5 x}{\cos x}\,dx$

$w(-x) = \frac{-\sin^5 x}{\cos x} \cdot d(-x) = \frac{\sin^5 x}{\cos x}\,d(x) = w(x)$

$\Rightarrow$ on prend : $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$

$$\int \frac{\sin^3 x}{t} dx = \int \frac{\sin^3 x}{t} \left(\frac{-dt}{\sin x} \right) = -\int \frac{\sin^4 x}{t} dt$$

$$= -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{t} dt = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t} dt$$

$$= -\int \frac{1 - 2t^2 + t^4}{t} dt = -\int \frac{1}{t} dt + \int 2t \, dt - \int t^3 dt$$

$$= -\ln|t| + t^2 - \frac{t^4}{4} + C$$

$$= -\ln|\cos x| + \cos^2 x + \frac{\cos^4 x}{4} + C$$