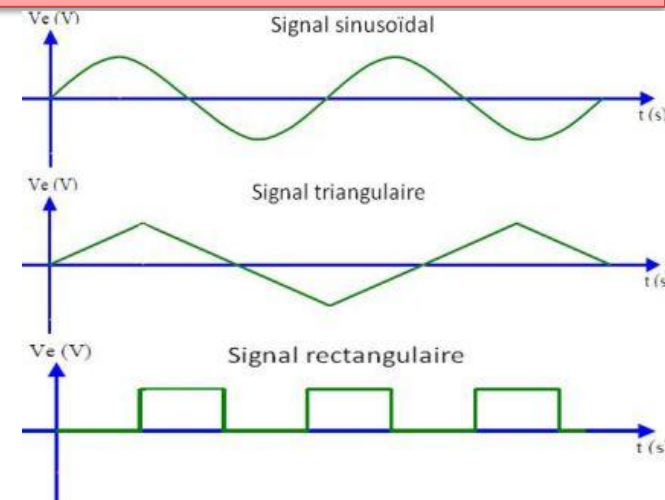


~~A-Généralités sur les signaux~~

B-Rappels mathématiques (notions de base)



Signaux paire et impaire

1. un signal à variation temporelle continue $x(t)$ est pair si

$$x(-t) = x(t) \text{ pour tout } t$$

2. un signal à variation temporelle continue $x(t)$ est impair si

$$x(-t) = -x(t) \text{ pour tout } t$$

Signaux ni paire ni impaire

- Il existe des signaux qui sont ni pair ni impair
- Dans ce cas on peut toujours décomposer ce type de signaux en une partie paire et une partie impaire

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

Signaux ni paire ni impaire

- $x_p(t)$ signifie la partie paire
- $x_i(t)$ signifie la partie

- Avec
$$x_p(t) = \left(\frac{x(t) + x(-t)}{2} \right)$$
$$x_i(t) = \left(\frac{x(t) - x(-t)}{2} \right)$$

Problème P.1 : Trouver les parties paire et impaire de chacun des signaux suivants :

1. $x(t) = \cos(t) + \sin(t) + \sin(t) \times \cos(t)$
2. $x(t) = 1 + t + 3t^2 + 5t^3 + 9t^4$
3. $x(t) = 1 + t \cos(t) + t^2 \sin(t) + t^3 \sin(t) \times \cos(t)$
4. $x(t) = (1 + t^3) \cos^3(t)$

Réponses :

1. Paire : $\cos(t)$; Impaire : $\sin(t) \times \{1 + \cos(t)\}$.
2. Paire : $1 + 3t^2 + 9t^4$; Impaire : $t + 5t^3$.
3. Paire : $1 + t^3 \sin(t) \cos(t)$; Impaire : $t \cos(t) + t^2 \sin(t)$.
4. Paire : $\cos^3(t)$; Impaire : $t^3 \cos^3(t)$.

Signaux périodiques

- Un signal de la variable continue $x(t)$ est périodique si il satisfait la relation suivante :

$$x(t) = x(t + T)$$

- Ou T est la période fondamentale du signal $x(t)$.

- Cas général $x(t) = x(t \pm nT) = x(t + T)$

Signaux périodiques

- On définit la fréquence fondamentale d'un signal périodique par

$$f=1/T$$

On définit la pulsation fondamentale d'un signal périodique par

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Signaux périodiques

- Condition de périodicité de la somme de 2 ou plusieurs signaux périodiques:
- soient $x_1(t) = x_1(t+n_1T_1)$ et $x_2(t) = x_2(t+n_2T_2)$
- $x_1(t)+x_2(t)$ est périodique ie .

$$x_1(t)+x_2(t) = x_1(t+T)+x_2(t+T)$$

Ssi il existe (n_1, n_2) de \mathbb{N}^* / $n_1T_1 = n_2T_2 = T$

Energie et puissance d'un signal

Energie & puissance

Soit un signal $x(t)$ défini sur $] -\infty, +\infty [$, et T_0 un intervalle de temps

1- Energie de $x(t)$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{ou} \quad E = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

2- Puissance moyenne de $x(t)$

$$P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

➤ Homogène à E/t

Cas des signaux périodiques de période T

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Energie & puissance

Signaux à énergie finie \Rightarrow puissance moyenne nulle

- cas des signaux représentant une grandeur physique,
- Signaux transitoires à support borné

Signaux à énergie infinie \Rightarrow puissance moyenne non nulle

- Cas des signaux périodiques Généralement,

(Notion valable pour les signaux aléatoires et déterministes)

VALEUR MOYENNE D'UN SIGNAL $x(t)$

1. Si $x(t)$ est périodique $\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$

2. Sinon la valeur moyenne de $x(t)$ sur un intervalle $[a \ b]$:

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt$$

VALEUR EFFICACE D'UN SIGNAL $x(t)$

$$x_{eff}(t) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt}$$

Signaux analogiques fondamentaux

Fonction de Heaviside

- On appelle **fonction de Heaviside** ou encore **fonction échelon unité** la fonction notée \mathcal{U} (ou parfois \mathcal{H}) définie par

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- La fonction de Heaviside sert à «fabriquer» des fonctions causales : en effet si f est une fonction numérique quelconque définie sur \mathbb{R} , alors $f \times \mathcal{U}$ est une fonction causale.

Echelon retardé, rampe

- On appelle **fonctions échelon retardé** les fonctions u_α définies par

$$u_\alpha(t) = u(t - \alpha)$$

- On appelle **rampe** la fonction r définie par

$$r(t) = t u(t)$$

Fonctions Porte et exponentielles

- On appelle **fonctions porte** ou **fenêtres rectangulaires** les fonctions notées Π_T ou Rect_T définies par

$$\Pi_T(t) = \text{Rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On appelle **décroissance exponentielle** les fonctions

$$e^{-\alpha t} \mathcal{U}(t) \text{ avec } \alpha > 0$$

- On appelle **approche exponentielle** les fonctions

$$(1 - e^{-\alpha t}) \mathcal{U}(t) \text{ avec } \alpha > 0$$

Signe - fenêtre triangulaire

- On appelle fonction **signe** la fonction définie par

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère aussi parfois que $\text{sgn}(0) = 0$

- On appelle **fenêtres triangulaires** ou **fenêtres de Barlett** les fonctions définies par

$$\text{tri}_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{T}|t| & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sinus cardinal

- On appelle fonction **sinus cardinal** la fonction définie par

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

et, par convention, $\text{sinc}(0) = 1$

- cette fonction est paire et nulle pour les valeurs entières de la variable.
- Nous admettrons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc } t \, dt = 1 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2 t \, dt = 1$$