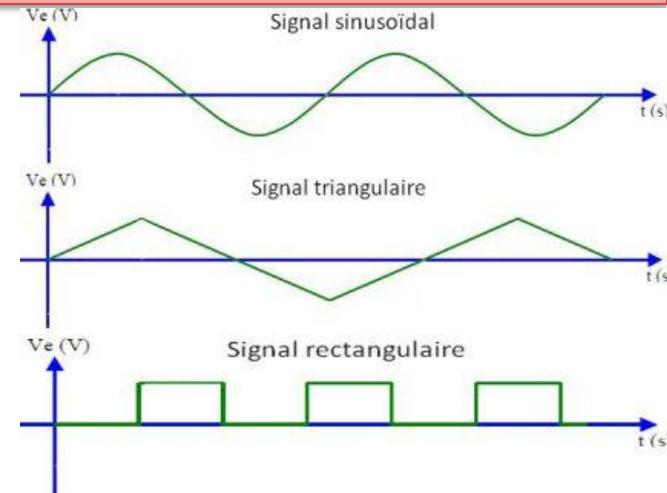


# ~~A-Généralités sur les signaux~~

# B-Rappels mathématiques (notions de base)



# Signaux paire et impaire

1. un signal à variation temporelle continue  $x(t)$  est pair si

$$x(-t) = x(t) \text{ pour tout } t$$

2. un signal à variation temporelle continue  $x(t)$  est impair si

$$x(-t) = -x(t) \text{ pour tout } t$$

# Signaux ni paire ni impaire

- Il existe des signaux qui sont ni pair ni impair
- Dans ce cas on peut toujours décomposer ce type de signaux en une partie paire et une partie impaire

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

# Signaux ni paire ni impaire

- $x_p(t)$  signifie la partie paire
- $x_i(t)$  signifie la partie

- Avec 
$$x_p(t) = \left( \frac{x(t) + x(-t)}{2} \right)$$
$$x_i(t) = \left( \frac{x(t) - x(-t)}{2} \right)$$



**Problème P.1 :** Trouver les parties paire et impaire de chacun des signaux suivants :

1.  $x(t) = \cos(t) + \sin(t) + \sin(t) \times \cos(t)$
2.  $x(t) = 1 + t + 3t^2 + 5t^3 + 9t^4$
3.  $x(t) = 1 + t \cos(t) + t^2 \sin(t) + t^3 \sin(t) \times \cos(t)$
4.  $x(t) = (1 + t^3) \cos^3(t)$

**Réponses :**

1. Paire :  $\cos(t)$ ; Impaire :  $\sin(t) \times \{1 + \cos(t)\}$ .
2. Paire :  $1 + 3t^2 + 9t^4$ ; Impaire :  $t + 5t^3$ .
3. Paire :  $1 + t^3 \sin(t) \cos(t)$ ; Impaire :  $t \cos(t) + t^2 \sin(t)$ .
4. Paire :  $\cos^3(t)$ ; Impaire :  $t^3 \cos^3(t)$ .

# Signaux périodiques

- Un signal de la variable continue  $x(t)$  est périodique si il satisfait la relation suivante :

$$x(t) = x(t + T)$$

- Ou  $T$  est la période fondamentale du signal  $x(t)$ .

- Cas général  $x(t) = x(t \pm nT) = x(t + T)$

# Signaux périodiques

- On définit la fréquence fondamentale d'un signal périodique par

$$f=1/T$$

On définit la pulsation fondamentale d'un signal périodique par

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

# Signaux périodiques

- Condition de périodicité de la somme de 2 ou plusieurs signaux périodiques:
- soient  $x_1(t) = x_1(t+n_1T_1)$  et  $x_2(t) = x_2(t+n_2T_2)$
- $x_1(t)+x_2(t)$  est périodique ie .

$$x_1(t)+x_2(t) = x_1(t+T)+x_2(t+T)$$

Ssi il existe  $(n_1, n_2)$  de  $\mathbb{N}^*$  /  $n_1T_1 = n_2T_2 = T$

# Energie et puissance d'un signal

# Energie & puissance

Soit un signal  $x(t)$  défini sur  $]-\infty, +\infty[$ , et  $T_0$  un intervalle de temps

## 1- Energie de $x(t)$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{ou} \quad E = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

## 2- Puissance moyenne de $x(t)$

$$P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

➤ Homogène à E/t

Cas des signaux périodiques de période  $T$

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

# Energie & puissance

## **Signaux à énergie finie $\Rightarrow$ puissance moyenne nulle**

- cas des signaux représentant une grandeur physique,
- Signaux transitoires à support borné

## **Signaux à énergie infinie $\Rightarrow$ puissance moyenne non nulle**

- Cas des signaux périodiques Généralement,

(Notion valable pour les signaux aléatoires et déterministes)

# VALEUR MOYENNE D'UN SIGNAL $x(t)$

1. Si  $x(t)$  est périodique  $\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$

2. Sinon la valeur moyenne de  $x(t)$  sur un intervalle  $[a \ b]$ :

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{b - a} \int_a^b x(t) dt$$

# VALEUR EFFICACE D'UN SIGNAL $x(t)$

$$x_{eff}(t) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt}$$

# Signaux analogiques fondamentaux

# Fonction de Heaviside

- On appelle **fonction de Heaviside** ou encore **fonction échelon unité** la fonction notée  $U$  (ou parfois  $H$ ) définie par

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- La fonction de Heaviside sert à «fabriquer» des fonctions causales : en effet si  $f$  est une fonction numérique quelconque définie sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f \times U$  est une fonction causale.

# Echelon retardé, rampe

- On appelle **fonctions échelon retardé** les fonctions  $u_\alpha$  définies par

$$u_\alpha(t) = u(t - \alpha)$$

- On appelle **rampe** la fonction  $r$  définie par

$$r(t) = t u(t)$$

# Fonctions Porte et exponentielles

- On appelle **fonctions porte** ou **fenêtres rectangulaires** les fonctions notées  $\Pi_T$  ou  $\text{Rect}_T$  définies par

$$\Pi_T(t) = \text{Rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On appelle **décroissance exponentielle** les fonctions

$$e^{-\alpha t} \mathcal{U}(t) \text{ avec } \alpha > 0$$

- On appelle **approche exponentielle** les fonctions

$$(1 - e^{-\alpha t}) \mathcal{U}(t) \text{ avec } \alpha > 0$$

# Signe - fenêtre triangulaire

- On appelle fonction **signe** la fonction définie par

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère aussi parfois que  $\text{sgn}(0) = 0$

- On appelle **fenêtres triangulaires** ou **fenêtres de Barlett** les fonctions définies par

$$\text{tri}_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{T}|t| & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

# Sinus cardinal

- On appelle fonction **sinus cardinal** la fonction définie par

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

et, par convention,  $\text{sinc}(0) = 1$

- cette fonction est paire et nulle pour les valeurs entières de la variable.
- Nous admettrons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc} t \, dt = 1 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2 t \, dt = 1$$