



التخصص علوم وتقنيات	المستوى سنة أولى	السداسي 01	2019/ 2018
---------------------	------------------	------------	------------

سلسلة الأعمال الموجهة لمقياس الرياضيات 1

ملاحظة : قبل بداية كل حصة TD الطالب ملزم بإحضار : محاولاته للتمرين + ملخص المحاضرة موضوع التمرين

المنطق الرياضي	المدة 01.سا و 30 د
----------------	--------------------

التمرين 01 1. قضيتان منطقيتان بمجدول الحقيقة بين صحة :

$$1. (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \bar{Q}) \quad (\text{نفي الاستلزام})$$

$$2. (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}) \quad (\text{أساس البرهان بعكس النقيض})$$

$$3. \left[(\bar{P} \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}) \right] \Leftrightarrow P \quad \leftarrow \text{يترك للطالب} \quad (\text{أساس البرهان بالخلف})$$

2. اذكر صحة أو خطأ القضايا التالية ثم أعط عبارة النفي :

$$1. \forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$$

$$2. \exists x \in \mathbb{R} : (x \geq 5 \Rightarrow x^2 + 5x - 1 \neq 0)$$

$$3. \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x+y \text{ زوجي}$$

$$4. \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x+y \text{ زوجي}$$

أنماط البرهان	المدة 01.سا و 30 د
---------------	--------------------

التمرين 02 : باختيار نمط برهان اثبت صحة كلا مما يلي :

$$1. (a \neq -1) \wedge (b \neq -1) \Rightarrow (a+b+ab+1 \neq 0) \quad , \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

$$2. ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2 \quad , \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

$$3. \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \leftarrow \text{يترك للطالب}$$

$$4. \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots \sqrt{2}}}}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

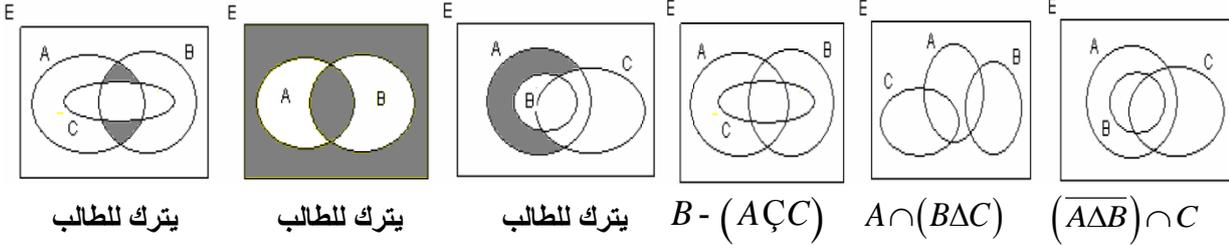
الأسئلة التالية مستقلة عن بعضها

التمرين 03 :

السؤال 1 $A = \{1,2,4,5\}$ و $B = \{n \in \mathbb{Z} : |n| \leq 2\}$ مجموعتين حيث:
اكتب التعريف أولا ثم عناصر المجموعات التالية :

$$P(A), A \times B, A \Delta B, B - A, A - B, A \cup B, A \cap B$$

السؤال 2 لون المجموعة المعطاة و عبر عن المجموعة الملونة باختصار :

السؤال 3 (تذكير $(A - B) = A \cap \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{\overline{A}} = A$)

لتكن E مجموعة A, B, C مجموعات جزئية من E. بين الخواص التالية :

- $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
- $\overline{B} - \overline{A} = A - B$ ← يترك للطالب
- تذكر إن $\overline{A \Delta B} = A \Delta B$, $(A \Delta B) = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $(B \subset C) \Rightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$ ← يترك للطالب
- $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \overline{B} \cap (A \cup B) = A$

الأسئلة التالية مستقلة عن بعضها

التمرين 04 :

السؤال 1. \mathcal{R} علاقة ثنائية معرفة على \mathbb{R} بـ :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = x - y$$

برهن أن \mathcal{R} علاقة تكافؤ. عين صنف تكافؤ 1السؤال 2. \mathcal{R} علاقة معرفة على \mathbb{N}_*^2 كما يلي :

$$(a, b) \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

برهن أن \mathcal{R} علاقة تكافؤ. عين صنف تكافؤ كلا من (0.1) و (1.0)السؤال 3. \mathcal{R} علاقة ثنائية معرفة في \mathbb{R}_*^+ بـ :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y = x^n$$

برهن أن \mathcal{R} علاقة ترتيب. هل الترتيب كلي ؟

التمرين 05 : (أسئلة تحريك يد)

1. نعتبر التطبيق $\mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ بين أن g متباين ؟ هل هو غامر؟2. ليكن $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ تطبيق معرف بـ $(n) = n^2 - 4$ اوجد كلا من $f(A)$ و $f^{-1}(B)$ حيث

$$A = \{n \in \mathbb{Z} : |n| \leq 2\} \text{ و } B = \{n \in \mathbb{Z} : |n| \leq 1\}$$

التمرين 06 : ليكن $f: E \rightarrow F$ تطبيق وليكن $A_1, A_2 \subset P(E)$ و $B_1, B_2 \subset P(F)$ برهن أن

1. $\overline{f^{-1}(B_1)} = f^{-1}(\overline{B_1})$

2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

التمرين 07 : ليكن $f: E \rightarrow F$ و $g: F \rightarrow G$ تطبيقين برهن أن
التمرين
يترك للطالب \longrightarrow

1. f متباين $\Leftrightarrow \forall X \in P(E): f^{-1}(f(X)) = X$

2. f غامر $\Leftrightarrow \forall Y \in P(F): f(f^{-1}(Y)) = Y$

3. f متباين $\Rightarrow g \circ f$ متباين

4. g غامر $\Rightarrow g \circ f$ غامر

التمرين 08 : ليكن A و B مجموعتين من $\mathcal{P}(E)$ مجموعة أجزاء المجموعة E .نعتبر التطبيق $f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ معرف بـ ;

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

1. احسب كلا من: $f(E)$ و $f(A \cup B)$ 2. برهن أن: f متباين $\Leftrightarrow A \cup B = E$ 3. برهن أن: f غامر $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ يترك للطالب \longrightarrow التمرين 09 : نعتبر التطبيق $f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ معرف من اجل كل B منفصلين من $\mathcal{P}(E)$ بـ :

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

1. برهن أن $f(\emptyset) = 0$ 2. بين انه من اجل كل X و Y من $\mathcal{P}(E)$ بلدينا :

$$f(X \cup Y) = f(X) + f(Y) - f(X \cap Y)$$

التمرين
يترك للطالب \longrightarrow

السؤال 1 اوجد مجموعة تعريف الدوال التالية

$$f_1(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad f_2(x) = \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right), \quad f_3(x) = \frac{1+x^2}{E(x)}$$

السؤال 2 احسب النهايات التالية:

$$\lim_{\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \lim_{+\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \sin x}{x}\right)$$

التمرين 11 لتكن الدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{a}, & x \leq 0 \\ \frac{\sin(ax)}{x} + (x-a)E(x) - \sqrt{x}, & 0 < x \leq a \end{cases}$$

1. اكتب مجموعة تعريف الدالة f
2. اوجد a حتى تكون f مستمرة عند 0
3. بين انه : $\exists c \in]0,1[: f(c) = 0$

تمرين 12 لتكن f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a,b]$ بحيث : $f(a) < g(a)$ و $f(b) > g(b)$ بين انه : $\exists c \in]a,b[: f(c) = g(c)$ يترك للطالب

التمرين 13 ادرس التمديد بالاستمرار عند 0 للدوال :

$$g(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2}, \quad f(x) = \frac{(e^{\sqrt{1+\sin(x)}} - e)}{x}$$

التمرين 16 باستعمال قاعدة لوبيتال. احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin x}$$

التمرين 14 ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 حيث $f(x) = \ln(\cos \sqrt{|x|})$ التمرين 15 لتكن الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ احسب المشتق النوني : $f^{(n)}(x)$

التمرين 17 احسب كلا من : $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\arctan(\sqrt{3})$

التمرين 18 بين إن :

يترك للطالب $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[\arccos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[\arctan x]' = \frac{1}{1+x^2}$

التمرين 19 لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

1. عين مجموعة تعريف f ؟

2. عين مشتقة f ؟

3. استنتج عبارة أخرى لـ f ؟

التمرين 20 بين إن : $\arctan(x) + 2 \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$ يترك للطالب

التمرين 21 بين إن :

2. $\operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ $x \geq 1$, 1. $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$

3. $\operatorname{argch}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $|x| > 1$, 4. $\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ $x \in \mathbb{R}$

التمرين 22 اوجد النشور المحدود بجوار 0 حتى الرتبة n المرفقة للدوال :

$f_1(x) = e^x \cos x$, $n=3$. $f_2(x) = (\ln(1+x))^2$, $n=4$

$f_3(x) = \frac{\operatorname{sh}x - x}{x^3}$, $n=6$. $f_4(x) = e^{\sin x}$, $n=4$

التمرين 23 تطبيقات النشور المحدود

احسب النهايات التالية

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$, 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$, 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \left(\sqrt{1+x} - (\operatorname{ch}x)^{\frac{1}{x}} \right)}{(e^x - 1)^3}$, 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\ln(1 + \operatorname{sh}x)}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{x^m}$, $m \in \mathbb{R}$