



التخصص علوم وتقنيات	المستوى سنة أولى	السداسي 01	2019/ 2018
---------------------	------------------	------------	------------

## سلسلة الأعمال الموجهة لمقياس الرياضيات 1

ملاحظة : قبل بداية كل حصة TD الطالب ملزم بإحضار : محاولاته للتمرين + ملخص المحاضرة موضوع التمرين

المدة 01.سا و 30 د

المنطق الرياضي

التمرين 01 1.  $P, Q$  قضيتان منطقيتان بمجدول الحقيقة بين صحة :

1.  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \bar{Q})$  (نفي الاستلزام)

2.  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$  (أساس البرهان بعكس النقيض)

3.  $[(\bar{P} \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q})] \Leftrightarrow P$  (أساس البرهان بالخلف) ← يترك للطالب

2. اذكر صحة أو خطأ القضايا التالية ثم أعط عبارة النفي :

1.  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

2.  $\exists x \in \mathbb{R} : (x \geq 5 \Rightarrow x^2 + 5x - 1 \neq 0)$

3.  $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x+y$  زوجي

4.  $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x+y$  زوجي

المدة 01.سا و 30 د

أنماط البرهان

التمرين 02 : باختيار نمط برهان اثبت صحة كلا مما يلي :

1.  $(a \neq -1) \wedge (b \neq -1) \Rightarrow (a+b+ab+1 \neq 0)$  ,  $(a, b \in \mathbb{Z})$

2.  $ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2$  ,  $(a, b, c \in \mathbb{R})$

3.  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  ← يترك للطالب

4.  $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

الأسئلة التالية مستقلة عن بعضها

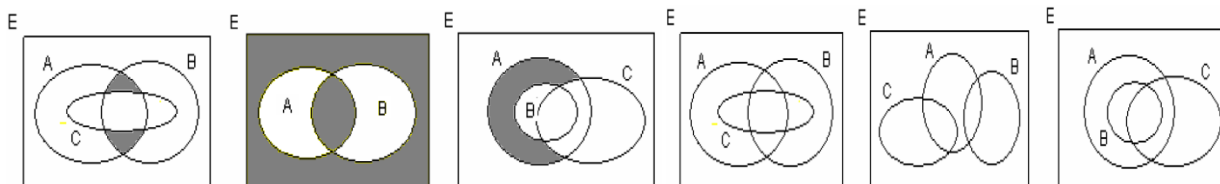
التمرين 03 :

السؤال 1  $A$  و  $B$  مجموعتين حيث:  $A = \{1,2,4,5\}$  و  $B = \{n \in \mathbb{Z} : |n| \leq 2\}$

أكتب التعريف أولا ثم عناصر المجموعات التالية :

$$P(A), A \times B, A \Delta B, B - A, A - B, A \cup B, A \cap B$$

السؤال 2 لون المجموعة المعطاة و عبر عن المجموعة الملونة باختصار :



يترك للطالب

يترك للطالب

يترك للطالب

$B - (A \cap C)$

$A \cap (B \Delta C)$

$(\overline{A \Delta B}) \cap C$

السؤال 3 ( تذكير  $(A - B = A \cap \overline{B}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{\overline{A}} = A$ )

لتكن  $E$  مجموعة  $A, B$  و  $C$  مجموعات جزئية من  $E$ . بين الخواص التالية :

$$1. (A - B) - C = A - (B \cup C)$$

$$2. \overline{B} - \overline{A} = A - B$$

يترك للطالب

$$3. \overline{A \Delta B} = A \Delta B, (A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B))$$

$$4. (B \subset C) \Rightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$$

يترك للطالب

$$5. A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \overline{B} \cap (A \cup B) = A$$

الأسئلة التالية مستقلة عن بعضها

التمرين 04 :

السؤال 1.  $\mathcal{R}$  علاقة ثنائية معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = x - y$$

برهن أن  $\mathcal{R}$  علاقة تكافؤ. عين صنف تكافؤ 1

السؤال 2.  $\mathcal{R}$  علاقة معرفة على  $\mathbb{N}_*^2$  كما يلي :

$$(a, b) \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

يترك للطالب

برهن أن  $\mathcal{R}$  علاقة تكافؤ. عين صنف تكافؤ كلا من (0.1) و (1.0)

السؤال 3.  $\mathcal{R}$  علاقة ثنائية معرفة في  $\mathbb{R}_*^+$  بـ :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y = x^n$$

برهن أن  $\mathcal{R}$  علاقة ترتيب. هل الترتيب كلي ؟

التمرين 05 : (أسئلة تحريك يد)

1. نعتبر التطبيق  $g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  حيث  $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

بين أن  $g$  متباين ؟ هل هو غامر ؟

2. ليكن  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  تطبيق معرف بـ  $f(n) = n^2 - 4$

اوجد كلا من  $f(A)$  و  $f^{-1}(B)$  حيث

$$A = \{n \in \mathbb{Z} : |n| \leq 1\} \text{ و } B = \{n \in \mathbb{Z} : |n| \leq 2\}$$

التمرين 06 : ليكن  $f: E \rightarrow F$  تطبيق وليكن  $A_1, A_2 \subset P(E)$  و  $B_1, B_2 \subset P(F)$  برهن أن

$$1. \overline{f^{-1}(B_1)} = f^{-1}(\overline{B_1})$$

$$2. f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

$$3. f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

التمرين 07 : ليكن  $f: E \rightarrow F$  و  $g: F \rightarrow G$  تطبيقين برهن أن

التمرين

يترك للطالب

$$1. f \text{ متباين} \Leftrightarrow \forall X \in P(E): f^{-1}(f(X)) = X$$

$$2. f \text{ غامر} \Leftrightarrow \forall Y \in P(F): f(f^{-1}(Y)) = Y$$

$$3. f \text{ متباين} \Rightarrow g \circ f \text{ متباين}$$

$$4. g \text{ غامر} \Rightarrow g \circ f \text{ غامر}$$

التمرين 08 : ليكن  $A$  و  $B$  مجموعتين من  $\mathcal{P}(E)$  مجموعة أجزاء المجموعة  $E$ .

نعتبر التطبيق  $f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$  معرف بـ ;

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

1. احسب كلا من:  $f(E)$  و  $f(A \cup B)$

2. برهن أن:  $f$  متباين  $\Leftrightarrow A \cup B = E$

3. برهن أن:  $f$  غامر  $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$  يترك للطالب

التمرين 09 : نعتبر التطبيق  $f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$  معرف من اجل كل  $B$  منفصلين من  $\mathcal{P}(E)$  بـ :

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

التمرين

يترك للطالب

$$1. \text{ برهن أن } f(\emptyset) = 0$$

2. بين انه من اجل كل  $X$  و  $Y$  من  $\mathcal{P}(E)$  بلدينا :

$$f(X \cup Y) = f(X) + f(Y) - f(X \cap Y)$$

السؤال 1 اوجد مجموعة تعريف الدوال التالية

$$f_1(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad f_2(x) = \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right), \quad f_3(x) = \frac{1+x^2}{E(x)}$$

السؤال 2 احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \sin x}{x}\right)$$

التمرين 11 لتكن الدالة  $f$  المعرفة بـ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{a}, & x \leq 0 \\ \frac{\sin(ax)}{x} + (x-a)E(x) - \sqrt{x}, & 0 < x \leq a \end{cases}$$

1. اكتب مجموعة تعريف الدالة  $f$ 2. اوجد  $a$  حتى تكون  $f$  مستمرة عند 03. بين انه :  $\exists c \in ]0,1[ : f(c) = 0$ تمرين 12 لتكن  $f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على المجال  $[a,b]$  بحيث :  $f(a) < g(a)$  و  $f(b) > g(b)$ بين انه :  $\exists c \in ]a,b[ : f(c) = g(c)$  يترك للطالب

التمرين 13 ادرس التمديد بالاستمرار عند 0 للدوال :

$$g(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2}, \quad f(x) = \frac{(e^{\sqrt{1+\sin(x)}} - e)}{x}$$

التمرين 16 باستعمال قاعدة لوبيتال. احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin x}$$

التمرين 14 ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند 0 حيث  $f(x) = \ln(\cos \sqrt{|x|})$ التمرين 15 لتكن الدالة المعرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  احسب المشتق النوني :  $f^{(n)}(x)$

التمرين 17 احسب كلا من :  $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ ,  $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $\arctan(\sqrt{3})$

التمرين 18 بين إن :

$$\text{يتترك للطالب} \quad [\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad [\arccos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad [\arctan x]' = \frac{1}{1+x^2}$$

التمرين 19 لتكن الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

1. عين مجموعة تعريف  $f$  ؟

2. عين مشتقة  $f$  ؟

3. استنتج عبارة أخرى لـ  $f$  ؟

التمرين 20 بين إن :  $\arctan(x) + 2 \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$  يتترك للطالب

التمرين 21 بين إن :

$$2. \operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad x \geq 1, \quad 1. \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

$$3. \operatorname{argch}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad |x| > 1, \quad 4. \operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

التمرين 22 اوجد النشور المحدود بجوار 0 حتى الرتبة  $n$  المرفقة للدوال :

$$f_1(x) = e^x \cos x, n=3 \quad . \quad f_2(x) = (\ln(1+x))^2, n=4$$

$$f_3(x) = \frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}, n=6 \quad . \quad f_4(x) = e^{\sin x}, n=4$$

التمرين 23 تطبيقات النشور المحدود

احسب النهايات التالية

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}, \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \left( \sqrt{1+x} - (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}} \right)}{(e^x - 1)^3}, \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\ln(1 + \operatorname{sh} x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0_+} (\cos x)^{\frac{1}{x^m}}, m \in \mathbb{R}$$