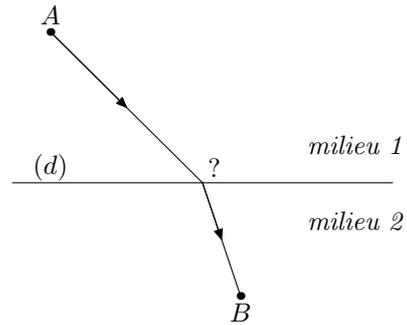


# RÉFRACTION : PRINCIPE DE FERMAT ET LOI DE SNELL - DESCARTES

La droite  $(d)$  sépare deux milieux homogènes différents.

Dans le premier milieu, la lumière se déplace à la vitesse  $v_1$ , et dans le deuxième à la vitesse  $v_2$ .

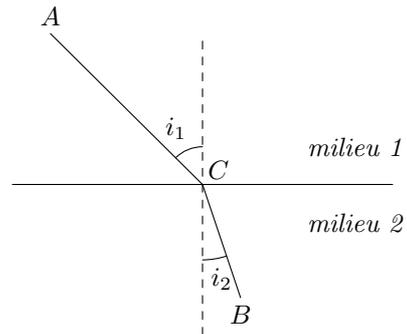
La question est de savoir quelle trajectoire va emprunter la lumière pour aller du point  $A$  (situé dans le premier milieu) au point  $B$  (situé dans le deuxième milieu).



D'après la loi de Snell-Descartes concernant la réfraction, la lumière va passer par le point  $C$  tel que :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

$n_1$  et  $n_2$  sont les indices de réfraction des milieux et sont définis par  $n_i = \frac{c}{v_i}$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $v_i$  la vitesse de la lumière dans le milieu.



Le principe de Fermat, appelé aussi principe du moindre temps, énonce que la lumière se propage entre deux points en suivant la trajectoire qui minimise le temps de parcours.

Nous donnons ci-dessous des démonstrations de l'équivalence entre la loi de Descartes - Snell et le principe de Fermat dans le cas de la réfraction, puis nous étudions plus rapidement le cas de la réflexion.

## A Démonstration analytique

Le fichier geogebra avec la figure ci-contre (Fermat-ana.ggb) est à disposition sur le site de l'IREM de Besançon.

Chercher la trajectoire qui minimise le temps de parcours revient à chercher la valeur de  $x$  qui minimise la fonction  $f$  définie par  $f(x) = t_1 + t_2$ , où :

- $t_i$  est la durée du trajet dans le milieu  $i$ ;
- $x$  est la distance  $HC$ ;
- la distance  $HK$  est notée  $h$ .

On a :  $t_1 = \frac{AC}{v_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1}$  et  $t_2 = \frac{CB}{v_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (h-x)^2}}{v_2}$ ;

D'où :  $f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (h-x)^2}}{v_2}$ .

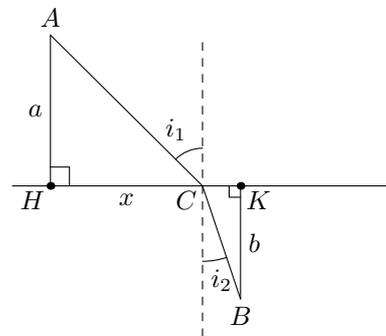
La fonction  $f$  est définie est dérivable sur son ensemble de définition  $[0; h]$ , nous allons rechercher son minimum en étudiant le signe de sa dérivée.

En utilisant la formule  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ , on obtient :  $f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x-h}{v_2\sqrt{b^2 + (h-x)^2}}$

Comme la fonction  $f'$  est continue, négative pour  $x = 0$ , positive pour  $x = h$ , elle s'annule (au moins une fois) sur l'intervalle  $[0; h]$ , et le minimum de la fonction  $f$  est atteint en une valeur de  $x$  telle que  $f'(x) = 0$ .

Nous résolvons l'équation  $f'(x) = 0$ , en remplaçant  $x$  par  $a \tan(i_1)$  et  $(h-x)$  par  $b \tan(i_2)$  :

$$f'(x) = 0 \iff \frac{a \tan(i_1)}{v_1 \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2(i_1)}} + \frac{-b \tan(i_2)}{v_2 \sqrt{b^2 + b^2 \tan^2(i_2)}} = 0$$



$$f'(x) = 0 \iff \frac{\tan(i_1)}{v_1 \sqrt{1 + \tan^2(i_1)}} - \frac{\tan(i_2)}{v_2 \sqrt{1 + \tan^2(i_2)}} = 0$$

En utilisant la formule :  $1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$ , et le fait que  $i_1$  et  $i_2$  sont des angles aigus, et donc que leur cosinus est positif, on a :  $\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(i_1)}} = \cos(i_1)$ , ce qui donne au final :

$$f'(x) = 0 \iff \frac{\tan(i_1) \cos(i_1)}{v_1} = \frac{\tan(i_2) \cos(i_2)}{v_2}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{\sin(i_1)}{v_1} = \frac{\sin(i_2)}{v_2}$$

Enfin, comme  $v_i = \frac{c}{n_i}$  :

$$f'(x) = 0 \iff n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

**Les trajectoires qui minimisent le temps de parcours sont telles que  $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ .**

## B Démonstration géométrique

Nous considérons une trajectoire telle que :  $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ , et nous allons démontrer qu'un autre trajet est nécessairement plus long.

*Le fichier geogebra avec la figure ci-contre (Fermat-geo.ggb) est à disposition sur le site de l'IREM de Besançon.*

Le trajet « A-C-B » est tel que :  $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ , le trajet « A-K-B » est un autre trajet.

Le point  $O$  est le projeté orthogonal de  $K$  sur  $(BC)$ ,  $H$  le projeté orthogonal de  $K$  sur la droite perpendiculaire à  $(AC)$  passant par  $C$ , et  $I$  le point d'intersection des droites  $(AK)$  et  $(CH)$ .

Le trajet « A-C-B » peut se décomposer en trois morceaux :  $AC$ ,  $CO$  et  $OB$ , et le trajet « A-K-B » en :  $AI$ ,  $IK$  et  $KB$ .

Nous allons comparer la durée de ces morceaux deux à deux :

1. Le premier morceau  $AI$  est plus grand en distance que  $AC$ , et comme il s'agit du même milieu, la vitesse de la lumière est la même et il est donc aussi plus long en temps.
2. De même le troisième morceau  $KB$  est plus long en temps que  $OB$ .
3. Il nous reste à comparer les deuxièmes morceaux,  $IK$  et  $CO$  :

$IK$  est plus grand que  $HK$  en distance, et donc plus long en temps. Comparons  $HK$  et  $CO$  :

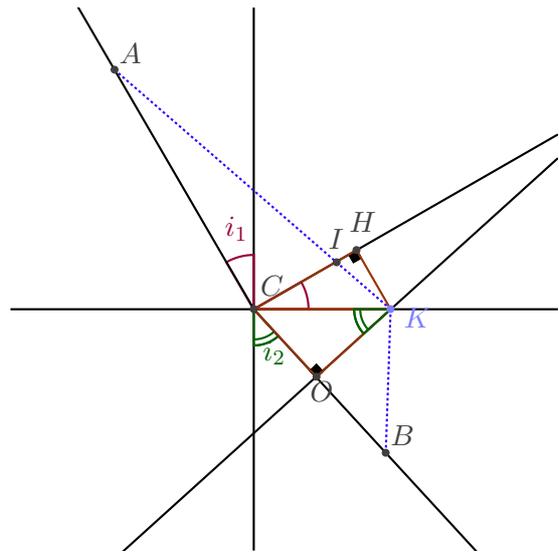
$HK = CK \times \sin(i_1)$  et  $CO = CK \times \sin(i_2)$

Or :  $\frac{\sin(i_1)}{\sin(i_2)} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$  Donc,  $\frac{HK}{CO} = \frac{v_1}{v_2}$ , d'où  $\frac{HK}{v_1} = \frac{CO}{v_2}$ .

On en déduit que les trajets  $HK$  et  $CO$  sont égaux en durée, et par conséquent que le deuxième morceau  $IK$  est plus long en temps que le deuxième morceau  $CO$ .

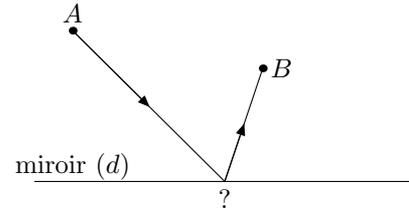
Chacun des morceaux du trajet « A-K-B » étant plus long que son homologue du trajet « A-C-B », on peut conclure :

**Les trajectoires telles que  $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$  sont celles qui minimisent le temps de parcours.**



## C Complément : le principe de Fermat dans le cas de la réflexion

Il s'agit d'aller de  $A$  à  $B$ , « le plus vite possible », en passant par le miroir ( $d$ ). Dans ce cas, puisque l'on ne change pas de milieu, aller « le plus vite possible » équivaut à emprunter le chemin le plus court en distance.



Ce problème est souvent proposé dans les manuels de mathématiques (sous la forme par exemple d'un jardinier (en  $A$ ) qui souhaite aller arroser ses salades (en  $B$ ), en allant chercher de l'eau dans la rivière (droite ( $d$ )), tout en minimisant son trajet, ou autres exemples « concrets »...).

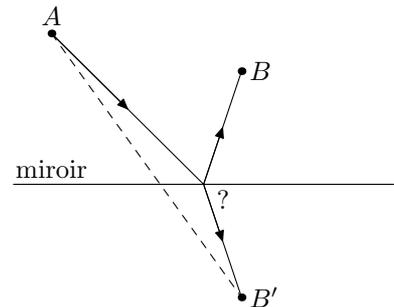
Comme dans le cas de la réfraction, ce problème peut s'aborder de manière analytique ou géométrique.

### 1. Point de vue géométrique

Soit  $B'$  le symétrique de  $B$  par rapport au miroir.

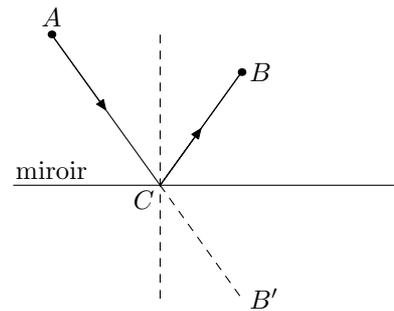
La longueur du trajet «  $A$ -?- $B$  » est égale à celle du trajet «  $A$ -?- $B'$  ».

Le trajet le plus court est réalisé lorsque « ? » est aligné avec  $A$  et  $B'$ .



**Le trajet solution est «  $A - C - B$  », où  $C$  est le point d'intersection du miroir et de  $(AB')$ .**

Des propriétés élémentaires des angles permettent alors d'affirmer que **les angles que forment les rayons lumineux avec la normale au miroir sont égaux.**



### 2. Point de vue analytique

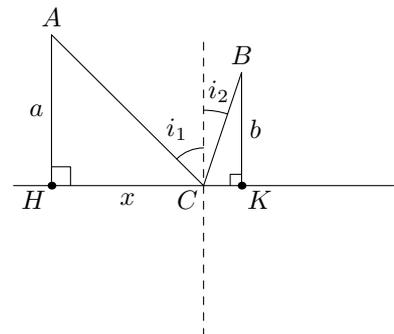
En reprenant les notations utilisées pour la réfraction, et en notant  $d(x)$  la longueur du trajet en passant par le point  $C$  (point variable du miroir), on trouve :

$$d(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (h - x)^2}, \text{ puis}$$

$$d'(x) = 0 \text{ pour } x = \frac{ah}{a + b}$$

$$\text{On a alors : } \frac{x}{a} = \frac{h}{a + b} = \frac{h - x}{(a + b) - a}$$

$$\text{D'où : } \frac{x}{a} = \frac{h - x}{b}, \text{ soit } \tan(i_1) = \tan(i_2) \text{ et } i_1 = i_2$$



**Le trajet le plus court est obtenu lorsque  $x = \frac{ah}{a + b}$ , et les angles que font les rayons lumineux avec la normale au miroir sont égaux.**