Université A.MIRA de Béjaïa
Faculté de la Technologie
1ère Année ST

Année Universitaire 2008/2009
01 Octobre 2009
Durée: 02 Heures (11h-13h)

Examen de Rattrapage de Physique 1

Exercice 1 (3 *pts*)

Soient A et B deux points de l'espace dont les coordonnées dans le repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ sont : $A\,(2, 2, -1)\,, B\,(1, -1, 1)$.

1. Calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
2. Trouver un vecteur du plan (xOy) de module égal à 2 et qui est perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$.
3. Déterminer les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) des points A et B.

Exercice 2 (5 *pts*)

Un Point matériel M est en mouvement dans le plan (xOy). Les composantes cartésiennes de son vecteur vitesse sont :

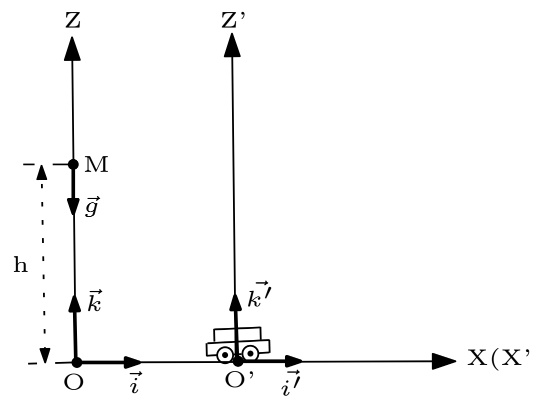
$$\begin{cases} v_x = R\omega \cos \omega t \\ v_y = R\omega \sin \omega t \end{cases}$$

où R et ω sont constantes réelles et positives. A l'instant $t = 0$, le mobile se trouve à l'origine $O\,(0, 0)$.

1. Déterminer les composantes cartésiennes du vecteur accélération.
2. Déterminer les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération .
   Déduire le rayon de courbure de la trajectoire.
3. Déterminer les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et déduire l'équation de la trajectoire.
   Quelle est la nature du mouvement ?

Exercice 3 (4 *pts*)

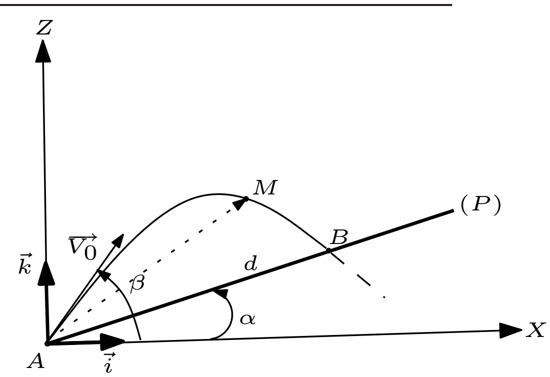
On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille M sans vitesse initiale. Dans un référentiel $R\,(OXZ)$ lié à cet immeuble, la chute de celle-ci s'effectue verticalement selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{g} = -g\vec{k}$ (voir la figure ci contre).



1. Déterminer le vecteur de position $\overrightarrow{O'M}$ de la bille dans un référentiel $R'\,(O'X'Z')$lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{u} = u\vec{i}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher . Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $R'\,(O'X'Z')$.
2. Déterminer le vecteur de position $\overrightarrow{O'M}$ de la bille dans dans le même référentiel $R'\,(O'X'Z')$ si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{a}_e = a_e\vec{i}$. Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $R'\,(O'X'Z')$.

Exercice 4 (5 *pts*)

Un projectile M, de masse m, est lancé à partir d'un point A avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ (de module V_0) faisant un angle β avec l'horizontale. La résistance de l'air est négligeable et la pesanteur est supposée constante $\vec{g} = -g\vec{k}$. D'autre part, on considère un plan matériel (P) incliné d'un angle α ($\alpha < \beta$) avec l'horizontale (voir la figure ci contre).



1. Déterminer le vecteur position de M à un instant t quelconque.
2. Déterminer l'instant où le projectile rencontre le plan (P).
3. Soit B le point de rencontre. Montrer que la distance $d = AB$ peut s'écrire : $d = \dfrac{2V_0^2 \sin(\beta - \alpha) \cos \beta}{g \cos^2 \alpha}$.

Questions de Cours (3 *pts*)

1. Énoncer les trois lois de Newton.
2. Montrer que si le module de la vitesse d'un mobile est constant alors son vecteur vitesse est perpendiculaire à son vecteur accélération.
3. Montrer que si une force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel $V\,(x, y, z)$, alors le travail de $\vec{F}$ entre deux points quelconques est indépendant du chemin suivi.

Bon Courage

Corrigé de l'Examen de Rattrapage de Physique 1

Solution de l'exercice 1 (3 pts)

1. Nous avons : $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \Longrightarrow \left|\overrightarrow{OA}\right| = 3, \left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{3}$

   $\Longrightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|} = -\frac{1}{3\sqrt{3}} = -0.192 \Longrightarrow \underbrace{\boxed{\alpha = 101.07^o}}_{\boxed{0.75\ pts}}$

2. On pose : $\vec{C} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ avec $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4 \\ \vec{C}\cdot\overrightarrow{OA} = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x + 2y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \underbrace{\boxed{x = -y = \pm\sqrt{2}}}_{\boxed{1\ pts}}$

3. $(x, y, z) \to (\rho, \theta, z)$ avec $\underbrace{\boxed{\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \Longrightarrow \theta = \arctan\frac{y}{x} \\ z = z \end{array}\right.}}_{\boxed{0.25\ pts}}$ alors

   $\underbrace{\boxed{\left\{\begin{array}{l} \rho_A = \sqrt{8} \\ \tan\theta_A = 1 \Longrightarrow \theta_A = 45^o \\ z_A = -1 \end{array}\right.}}_{\boxed{0.5\ pts}}$ et $\underbrace{\boxed{\left\{\begin{array}{l} \rho_B = \sqrt{2} \\ \tan\theta_B = -1 \Longrightarrow \theta_B = 315^o \\ z_B = 1 \end{array}\right.}}_{\boxed{0.5\ pts}}$

Solution de l'exercice 2 (5 pts)

On a : $\left\{\begin{array}{l} v_x = R\omega\cos\omega t \\ v_y = R\omega\sin\omega t \end{array}\right.$

1. $\underbrace{\boxed{\left\{\begin{array}{l} a_x = -R\omega^2\sin\omega t \\ a_y = R\omega^2\cos\omega t \end{array}\right.}}_{\boxed{1\ pts}}$

2. $a_t = \frac{dv}{dt}$ or $\underbrace{\boxed{v = R\omega}}_{\boxed{0.25\ pts}} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{a_t = 0}}_{\boxed{0.25\ pts}}$, $\underbrace{\boxed{a_n = a = R\omega^2}}_{\boxed{0.25\ pts}}$, $\underbrace{\boxed{\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(R\omega)^2}{R\omega^2} = R}}_{\boxed{0.75\ pts}}$

3. $\left\{\begin{array}{l} v_x = R\omega\cos\omega t \\ v_y = R\omega\sin\omega t \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = R\sin\omega t + A \\ y = -R\cos\omega t + B \end{array}\right.$ or à $t = 0$ $\left\{\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{array}\right.$

   $\Longrightarrow \underbrace{\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = R\sin\omega t \\ y = R\left(-\cos\omega t + 1\right) \end{array}\right.}}_{\boxed{1.5\ pts}}$

   L'équation de la trajectoire : $\underbrace{\boxed{x^2 + (y - R)^2 = R^2}}_{\boxed{0.75\ pts}}$ un cercle de rayon R et de centre $C\,(0, R)$. Ainsi, le mouvement est *circulaire uniforme.*

$\boxed{0.25\ pts}$

Solution de l'exercice 3 (4 pts)

Le vecteur position de la bille dans le référentiel $R'(O', X', Z')$ est :
$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i'} + z'\vec{k'}$ or $\vec{i} = \vec{i'}$ et $\vec{k} = \vec{k'}$ alors $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i} + z'\vec{k}$

1. On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Longrightarrow \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$ où $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur position de la bille dans le référentiel $R(O, X, Z)$. La bille est en mouvement de chute libre sans vitesse initiale dans $R(O, X, Z)$: $\underbrace{\boxed{\overrightarrow{OM} = \left(-\frac{g}{2}t^2 + h\right)\vec{k}}}_{0.5\ pts}$

   Dans le premier cas :
   $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{u} = u\vec{i} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{\overrightarrow{OO'} = \vec{u}t = ut\vec{i}}}_{0.5\ pts}$ car à $t = 0$ O' est confondu avec O.

   Ainsi, $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i} + z'\vec{k} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \underbrace{\boxed{\left(-\frac{g}{2}t^2 + h\right)\vec{k} - ut\vec{i}}}_{0.5\ pts}$

   $\Longrightarrow \begin{cases} x' = -ut \\ z' = -\frac{g}{2}t^2 + h \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{z' = -\frac{g}{2u}x' + h}}_{0.5\ pts}$ la trajectoire est une parabole.

2. Dans le deuxième cas :
   $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{a}_e = a_e\vec{i} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{\overrightarrow{OO'} = \frac{a_e}{2}t^2\vec{i}}}_{0.75\ pts}$

   Ainsi, $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i} + z'\vec{k} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \underbrace{\boxed{\left(-\frac{g}{2}t^2 + h\right)\vec{k} - \frac{a_e}{2}t^2\vec{i}}}_{0.5\ pts}$

   $\Longrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{a_e}{2}t^2 \\ z' = -\frac{g}{2}t^2 + h \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{z' = -\frac{g}{a_e}x' + h}}_{0.75\ pts}$ la trajectoire est une droite.

Solution de l'exercice 4 (5 pts)

1. En utilisant le PFD et les conditions initiales :
   $m\vec{a} = m\vec{g} = -mg\vec{k} \Longrightarrow \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = -g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_x = V_0\cos\beta \\ v_z = -gt + V_0\sin\beta \end{cases}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} x = (V_0\cos\beta)\,t \\ z = -\frac{g}{2}t^2 + (V_0\sin\beta)\,t \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{\overrightarrow{AM} = (V_0\cos\beta)\,t\ \vec{i} + \left(-\frac{g}{2}t^2 + (V_0\sin\beta)\,t\right)\vec{k}}}_{1\ pts}$

2. L'équation du plan incliné (P) (qui est une droite dans le plan XOZ) est : $\underbrace{\boxed{z = x\tan\alpha}}_{0.5\ pts}$.

   La trajectoire du projectile et le plan incliné se coupent pour les valeurs de t telles que :

$$z = x\tan\alpha \Longrightarrow -\frac{g}{2}t^2 + (V_0\sin\beta)\,t = (V_0\cos\beta)\,t\tan\alpha \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ou} \\ t = \frac{2V_0(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha)}{g\cos\alpha} \end{cases}$$

la valeur $t = 0$ correspond au point A. La deuxième valeur de t donne la position du point de rencontre B que nous cherchons. Ainsi, $\underbrace{\boxed{t_B = \frac{2V_0\sin(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha}}}_{\boxed{1.25\ pts}}$

3. Au point de rencontre B, nous avons :

   $z_B/d = \cos\alpha \Longrightarrow d = z_B/\cos\alpha = (V_0\cos\beta)\left(\frac{2V_0\sin(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha}\right)/\cos\alpha$

   $\Longrightarrow \underbrace{\boxed{d = \frac{2V_0^2\sin(\beta-\alpha)\cos\beta}{g\cos^2\alpha}}}_{\boxed{1.25\ pts}}$

Réponses aux Questions de Cours (3 *pts*)

$\boxed{1\ pts}$

1. Les trois lois de Newton sont :
   – Le principe d'inertie.
   – Le principe fondamental de la dynamique.
   – Le principe de l'action et de la réaction.
2. Il faut démontrer que $\vec{a}\cdot\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = 0$

   nous avons : $\frac{d}{dt}\left(v^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}^2\right) = 2v\frac{dv}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$

   $\Longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{dv}{dt}v$ or $\frac{dv}{dt} = 0$ (dans notre cas le module est constant)

   alors $\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = 0 = \vec{a}\cdot\vec{v} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{\vec{a}\perp\vec{v}}}_{\boxed{1\ pts}}$.
3. $W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B -\vec{\nabla}V\cdot d\vec{r} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B)$

   $\Longrightarrow$ *Ainsi le travail de $\vec{F}$ est independant du chemin suivi entre les points A et B*.

   $\boxed{1\ pts}$