

MECANIQUE du POINT

Année universitaire
2008-2009



Ouvrages recommandés

- E. Hecht, **Physique**, ITP DeBoeck Université (1999)
- H. Beson, **Physique 1 mécanique**, DeBoeck Université (1999)
- E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Aïm & N. Piccioli, **La physique en FAC, Mécanique 1^{ère} et 2^{ème} année**, EdiScience-Dunod (2003)
- J. Cipriani & H. Hasmonay, **Mécanique et énergie**, Librairie Vuibert (1997)
- J.P. Faroux & J. Renault, **Mécanique 1**, Dunod , 4^{me} édition (1996)
- Alonso & Finn, **Physique Générale 1, mécanique et thermodynamique**, InterEditions, 2nd édition (1994)
- J. Bergua & P. Goulley, **Résoudre un problème de mécanique**, Bréal, (1996)
- E. Klein, **L'unité de la physique**, PUF (2000)

Comment appréhender le cours de mécanique ?

- Travaillez régulièrement (!)
- Ne *jamais* apprendre une formule "par coeur" et essayer de l'appliquer aux problèmes rencontrés. D'abord, il faut comprendre la démonstration d'une "formule", puis savoir la redémontrer... Ainsi vous l'aurez comprise, donc apprise!
- Dans la mesure du possible, préparer les exercices de TD *avant* de venir en TD
- Le cours et les TDs ne suffisent pas pour comprendre la mécanique : empruntez et lisez des livres de la Bib'INSA !
- Entraînez-vous, faites des exercices autres que ceux des TDs

Table des matières

1	Présentation générale de la mécanique	5
1.1	La mécanique classique	5
1.2	La mécanique relativiste	6
1.3	La mécanique quantique	6
1.4	Récapitulatif et domaine de validité des théories présentées	7
1.4.1	Relativité restreinte	7
1.4.2	Mécanique classique ou mécanique Newtonienne	7
1.4.3	Mécanique quantique	7
1.5	Mécanique quantique relativiste...	7
2	Analyse vectorielle	9
2.1	Vecteurs	9
2.2	Produit scalaire	9
2.3	Produit vectoriel	9
2.4	Dérivée d'un vecteur par rapport au temps	10
2.5	Homogénéité des relations vectorielles	10
3	Cinématique	11
3.1	Quelques définitions	11
3.1.1	L'observateur	11
3.1.2	Notion de référentiel	11
3.1.3	Une classe de référentiels particuliers : les référentiels "galiléen"	11
3.1.4	Notion de repère de temps	11
3.1.5	Notion de point matériel	11
3.1.6	Repère et coordonnées	11
3.1.7	La notion de trajectoire	12
3.2	Cinématique dans le repère cartésien	13
3.2.1	Expression du vecteur position	13
3.2.2	Expression du vecteur "déplacement élémentaire"	13
3.2.3	Expression du vecteur vitesse	13
3.2.4	Expression du vecteur accélération	13
3.3	Cinématique dans le repère cylindrique	14
3.3.1	Expression du vecteur position	14
3.3.2	Expression du vecteur "déplacement élémentaire"	14
3.3.3	Expression du vecteur vitesse	14
3.3.4	Expression du vecteur accélération	14
3.4	Cinématique dans le repère sphérique	16
3.4.1	Expression du vecteur position	16
3.4.2	Expression du vecteur "déplacement élémentaire"	16
3.4.3	Expression du vecteur vitesse	16
3.4.4	Expression du vecteur accélération	16
3.5	Repère de Frenet	18
3.5.1	Expression du vecteur position	18
3.5.2	Expression du vecteur "déplacement élémentaire"	18
3.5.3	Expression du vecteur vitesse	18
3.5.4	Expression du rayon de courbure	18
3.5.5	Expression du vecteur accélération	18
3.6	Pourquoi avons-nous besoin de ces repères?	19
3.7	Exemples de mouvements simples	19
3.7.1	Le mouvement rectiligne	19
3.7.2	Le mouvement circulaire	19
3.7.3	Autres types de mouvement...	19

4	Mouvement relatif, changement de référentiel	21
4.1	Position du problème	21
4.1.1	Définitions et notations	21
4.1.2	Mouvement d'entraînement : translation et/ou rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R}	22
4.2	Composition du vecteur position	22
4.3	Composition du vecteur vitesse	22
4.4	Composition du vecteur accélération	23
4.5	Exemples et discussion	24
4.5.1	Cas où le mouvement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est une translation	24
4.5.2	Cas où le mouvement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est une rotation uniforme autour d'un axe fixe [Oz)	24
5	Dynamique	25
5.1	Masse et principe d'inertie	25
5.1.1	Notion de masse	25
5.1.2	Principe d'inertie - 1 ^{re} loi de Newton	25
5.2	Quantité de mouvement et chocs	26
5.2.1	Définition	26
5.2.2	Principe de conservation de la quantité de mouvement	26
5.2.3	Les chocs ou collisions	26
5.3	Notion de force	27
5.3.1	Généralités	27
5.3.2	Les forces usuelles	27
5.4	Formulation de la RFD dans un référentiel Galiléen - deuxième loi de Newton	30
5.5	Principe d'action et de réaction - troisième loi de Newton	30
5.6	Formulation de la RFD dans un référentiel non-Galiléen	31
5.7	Théorème du moment cinétique	31
5.7.1	De la RFD au théorème du moment cinétique...	31
5.7.2	Le cas des forces centrales	32
5.8	Considérations générales sur la résolution d'un problème de mécanique	33
5.8.1	Choix du système	33
5.8.2	Choix du référentiel	33
5.8.3	Choix du repère	33
5.8.4	Bilan des forces	34
5.8.5	Cinématique	34
5.8.6	Dynamique	34
5.8.7	Résolution mathématique du problème	34
5.8.8	Résolution du problème dans le repère cylindrique	36
6	Travail et Énergie	37
6.1	Travail d'une force	37
6.1.1	Définition	37
6.1.2	Signification physique	37
6.2	Théorème de l'énergie cinétique	38
6.3	Énergie potentielle et forces conservatives	38
6.3.1	Un nouvel outil mathématique : le gradient	38
6.3.2	Potentiel et énergie potentielle	39
6.3.3	Les forces conservatives	40
6.4	Énergie mécanique	40
6.5	Puits et barrières de potentiel	41
7	annexes	43
7.1	Cinématique et repères	43
7.2	Méthode de résolution des équation différentielles linéaires	47
7.2.1	Équation différentielle linéaire du premier ordre	47
7.2.2	Équation différentielle linéaire du second ordre	48
7.3	Les chocs élastiques : traitement mathématique	49
7.3.1	Chocs à 1 dimension	49
7.3.2	Chocs à deux dimensions	50

Chapitre 1

Présentation générale de la mécanique

1.1 La mécanique classique

La mécanique classique permet d'appréhender la plupart des phénomènes physiques de la vie courante. Elle permet, par exemple, de prévoir la trajectoire d'une voiture ou le vol d'un avion, de calculer la stabilité et la robustesse des bâtiments, ou encore d'expliquer les sons émis par la vibration des cordes d'un violon. Elle explique aussi la manière avec laquelle évoluent les planètes de notre système solaire, le mouvement relatif de la terre par rapport au soleil, levant ainsi le voile sur l'origine du jour, de la nuit et des saisons. Bien sûr, la mécanique classique n'a pas été construite en un jour : plusieurs siècles et de nombreux scientifiques (N. Copernic, T. Brahe, G. Galilée, R. Descartes, I. Newton, J.L. Lagrange etc...) se sont succédés afin de rendre mature cette théorie. Celle-ci repose principalement sur la notion de "force"... Nous faisons couramment appel à notre sens commun pour interpréter ce que sont les "forces" : par exemple, celui qui "possède" de la force est capable de déplacer facilement des objets massifs, ou bien peut appliquer des contraintes importantes sur la matière. Intuitivement, nous pensons aussi que la force est à l'origine du mouvement : on ne peut pas déplacer une brouette sans la pousser, c'est à dire sans lui appliquer une force! En mécanique classique, la nature intrinsèque d'une force n'est pas explicitement décrite : elle n'intervient en rien dans la prédiction des phénomènes mécaniques. Que ce soit une force dite magnétique, de gravitation, de frottement ou électrique, peu nous importe... du moment que nous savons comment la prendre en compte d'un point de vue mathématique! La "force" est une sensation que l'on peut ressentir, mesurer, mais que l'on ne cherche pas à explorer intimement dans le cadre de la mécanique classique. En ce sens, cette théorie est quelque peu "phénoménologique". Certains prétendent qu'elle est intuitive... C'est vrai pour ceux qui la maîtrisent, cela l'est en revanche beaucoup moins pour ceux qui la découvrent!

L'équation maîtresse de la mécanique classique, la relation fondamentale de la dynamique ($\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$), relie la somme vectorielle des forces appliquées sur un objet à son accélération. Mais que signifie exactement cette notion? Bien que nous en ressentons tous les jours ses effets, nous ne sommes, finalement, pas habitués à les expliquer en terme d'accélération. De plus, nous commettons souvent l'erreur de confondre "accélération" et "vitesse" : un concept plus accessible avec lequel nous sommes très familier. L'accélération est définie comme la dérivée première de la vitesse par rapport au temps (ou encore la dérivée seconde de la position par rapport au temps) : elle permet de décrire des "variations de vitesse". A travers la relation $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$, la force résultante est donc proportionnelle à l'accélération d'un objet. Comme déjà mentionné précédemment, beaucoup pensent que les forces sont à l'origine du "mouvement". Mais si tel était le cas, cette idée serait en contradiction avec notre sens commun : ne dit-on pas en effet qu'une voiture, roulant à vitesse constante, est en mouvement? Puisque sa vitesse est constante, alors son accélération est nulle... ainsi la somme des forces auxquelles elle est soumise est nulle... donc, la voiture n'est pas en mouvement! En général, ce type de "faux" paradoxe est lié à une erreur de définition : chacun de nous possède sa propre interprétation de notions *a priori* simples telles que la "vitesse", "l'accélération" et le "mouvement"... Or une théorie digne de ce nom doit reposer sur des bases solides, où chaque mot, chaque principe, possède une sens précis et universel.

Si on considère que le mouvement est simplement un "déplacement dans l'espace", alors les forces ne sont pas à l'origine du mouvement. Le mouvement est déjà partout autour de nous, en vertu du principe de relativité¹ introduit pour la première fois par Galilée. Dans un train en marche, les passagers sont immobiles par rapport au train, mais il se déplacent par rapport au sol de la terre, qui elle-même tourne autour du soleil... Finalement, tout est en mouvement par rapport à tout! L'accélération (et donc la force) sert simplement à *modifier* le mouvement d'un corps, notamment en changeant sa vitesse! Mais la encore un problème subsiste : considérons par exemple le mouvement circulaire² de la lune autour de la terre. Sa vitesse ne change pas au cours du temps, pourtant nous savons pertinemment qu'il s'exerce sur la lune une force de gravitation due à la proximité de la terre. Or s'il existe une force, il existe forcément une accélération... mais alors, la vitesse de la lune ne doit-elle pas changer? En fait, l'accélération n'est donc pas simplement une "variation de vitesse". Elle est, en réalité, "une variation du *vecteur* vitesse". La direction du mouvement (et ses variations) devient une notion importante. Dire qu'un objet n'est pas accéléré, cela signifie que ni sa direction, ni sa vitesse ne change au cours du temps.

1. Le principe de relativité (à ne pas confondre avec la "théorie de la relativité") exprime le fait que les lois physiques doivent être les mêmes dans tous les référentiels se déplaçant en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic

2. en réalité, le mouvement est elliptique...!

Pour les néophytes, ce dernier résultat peut sembler relativement contre-intuitif. Il illustre pourtant le fait que la mécanique classique doit être avant tout comprise "en profondeur" pour pouvoir l'appliquer correctement. L'héritage que nous laisse Sir Isaac Newton, tout son génie exprimé à travers une relation de trois lettres seulement $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ mérite d'être médité pleinement. Il s'agit là, entre autre, d'un des objectifs principal de ce cours. Terminons cette introduction en précisant que la mécanique classique n'est pas une théorie obsolète. Les concepts de base qui la constituent se retrouvent dans quasiment toutes les branches de la physique moderne. Les "opérateurs"³ de la mécanique quantique, par exemple, ont été construits à partir de leurs homologues classiques. Nous n'étudierons, dans le cadre de ce cours, que la "mécanique du point". La mécanique du solide (c'est à dire l'étude d'un ensemble de points formant un solide) ne sera pas discutée.

1.2 La mécanique relativiste

A la fin du XIX^{ème} siècle, l'homme pensait dominer la physique dans sa globalité. D'une part il maîtrisait les concepts de la mécanique classique, et d'autre part il avait su relier les branches a priori différentes de l'optique et de l'électromagnétisme (J.C. Maxwell). Il possédait ainsi deux grandes théories capables d'expliquer (presque) l'ensemble de tous les phénomènes physiques observés jusqu'alors. Mais il subsistait un problème majeur : ces deux grandes théories étaient incompatibles l'une avec l'autre : en mécanique classique, la vitesse d'un objet est relative au référentiel dans lequel l'observateur décide de l'étudier⁴, tandis que la vitesse de la lumière, quand à elle, ne dépend pas de la vitesse de sa source⁵. La lumière serait-elle un objet "différent" des autres ? Doit-elle être traitée "à part" ? Cette remarque n'était pas acceptable pour certains physiciens, qui considéraient alors la lumière comme une onde, faisant forcément vibrer un milieu "matériel" : l'éther.

L'une des plus grandes réalisations d'Albert Einstein fut d'une part, de supprimer la notion d'éther (qui posait plus de problème qu'elle n'en résolvait) et d'autre part de proposer une nouvelle théorie physique selon laquelle le temps n'est plus un paramètre dans les équations du mouvement, mais une coordonnée au même titre que les coordonnées spatiales x, y, z .

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ t \end{pmatrix}$$

La théorie de la relativité restreinte était née, dans laquelle le temps subissait aussi une transformation par changement de référentiel (transformation de Lorentz). La découverte de la relativité restreinte changea radicalement la manière d'appréhender notre univers et permis "d'unifier" la mécanique et l'électromagnétisme. La mécanique classique devait-elle être dès alors abandonnée au profit de cette nouvelle théorie ? Pas forcément : la mécanique classique est, finalement, une approximation très précise de la mécanique relativiste lorsque les vitesses mises en jeu sont très inférieures à celle de la lumière ; ce qui est le cas dans la plupart des phénomènes physiques rencontrés dans la vie courante.

1.3 La mécanique quantique

A mesure que la science progressait, de nouveaux phénomènes physiques étaient sans cesse découverts, dont certains ne pouvaient être expliqués avec les théories existantes (effet photoélectrique par exemple). Il fallait découvrir les propriétés intrinsèques de la matière, l'origine microscopique de certains processus physiques au sein même de la matière. La découverte de l'électron (J. J. Thomson - 1897), des noyaux atomiques (E. Rutherford - 1911), l'interprétation de N. Bohr de l'atome ainsi que de nombreuses autres expériences pionnières indiquèrent peu à peu que la mécanique classique ne pouvait plus être appliquée aux objets microscopiques. Une nouvelle théorie allait ainsi voir le jour : la mécanique quantique.

Le formalisme de la mécanique quantique est radicalement différent de celui de la mécanique classique (bien que les concepts de vitesse, de l'impulsion etc... soient construits à partir de leurs homologues classiques). Les particules sont représentées par une expression mathématique (dite "fonction d'onde") à partir de laquelle l'ensemble de ses propriétés peuvent être retrouvées par l'application "d'opérateurs" mathématiques (exemples : l'opérateur "vitesse", l'opérateur "probabilité de présence" etc...). La fonction d'onde proprement dite est obtenue à partir d'une équation, dite "équation de Schrödinger". La mécanique quantique est loin d'être une invention "purement théorique" et au delà de toute application pratique : la chimie physique, les supra-conducteurs, les lasers, la physique des semi-conducteurs ne sont que quelques exemples d'applications bien concrètes de la mécanique quantique, sans laquelle le monde ne serait pas ce qu'il est actuellement.

3. C'est à dire, en termes simples, des outils mathématiques propres à la mécanique quantique permettant d'obtenir des grandeurs physiques mesurables à partir de la fonction d'onde

4. voir chapitre 4

5. Expérience de Morley-Michelson

Quelle est la relation entre la mécanique classique et la mécanique quantique ? L'une est-elle l'approximation de l'autre ? Comment passe-t-on d'une description microscopique à une description macroscopique des phénomènes physiques ? Cette thématique fait encore l'objet d'études théoriques et expérimentales à ce jour, mais il semblerait qu'une analyse statistique des résultats prédits par la mécanique quantique, associé au concept de "décohérence", puissent reproduire les prédictions de la mécanique classique.

1.4 Récapitulatif et domaine de validité des théories présentées

1.4.1 Relativité restreinte

- Coordonnées d'espace et de temps sont liées : espace et temps sont indissociables
- La relativité restreinte s'applique pour tous les objets macroscopiques, loin des forts champs de gravitation. Les écarts théoriques sur les mesures de longueurs et de durée avec ce que prédit la mécanique de Newton ne sont significatifs que lorsque les vitesses entre objets ou observateurs en mouvements relatifs deviennent proches de la vitesse limite C . Du fait de son aspect peu intuitif et de la complexité des calculs, la relativité restreinte se limite essentiellement aux cas où des vitesses proches de la lumière sont obtenues, ou lorsque les mesures effectuées exigent une précision telle que les écarts avec la dynamique newtonienne deviennent significatifs.
- Sans la prise en compte des effets de relativité, la précision des systèmes de positionnement par satellite GPS et Galileo resterait inférieure à la dizaine de kilomètre, empêchant toute application utile telles que la localisation routière, les futurs systèmes de localisation et d'aide à l'atterrissage de la navigation aérienne etc...
- Une présentation de la relativité restreinte (7h) est donnée dans le MO de 3^{ème} année STPI "parlez-moi d'astrophysique"

1.4.2 Mécanique classique ou mécanique Newtonienne

- La cinématique newtonienne s'applique pour tous les observateurs à la quasi totalité des objets macroscopiques de notre vie de tous les jours, pour des applications industrielles ou grand public.
- La cinématique newtonienne est fondée sur votre intuition du monde, elle fonde votre connaissance et votre action sur le monde qui vous entoure
- Une approximation de la théorie de la relativité restreinte valable lorsque les vitesses mises en jeu sont très inférieures à la célérité
- Poursuite de l'approfondissement des connaissances dans les années à venir dans diverses formations de votre INSA (mécanique des solides déformables et indéformables, physique des dispositifs, mécanique des fluides etc...)

1.4.3 Mécanique quantique

- La mécanique quantique est la seule à décrire les résultats de l'expérience pour les objets matériels de taille nanoscopique (de l'ordre du nanomètre) dont les vitesses restent "non relativistes". Du fait du non-déterminisme de la loi d'évolution, on ne peut pas définir une notion de "trajectoire" entre deux mesures de positions pour un "corps" donné.
- Elle seule permet d'expliquer des phénomènes observés macroscopiquement, mais relatifs à des corpuscules de tailles microscopiques : émission lumineuse, microscopie électronique etc...
- Les applications de la mécanique quantique sont extrêmement nombreuses dans l'environnement technologique de ce début de XXI^{ème} siècle. Citons simplement comme application déjà largement répandue dans le domaine grand public : les transistors et le laser. En absence de découverte des lois de la mécanique quantique, l'informatique actuelle et les moyens de stockage/lecture de l'information n'existeraient pas.
- Découverte en 3^{ème} année MIC-IMACS, puis de façon opérationnelle en 3^{ème} année IMACS option GP, puis au département de physique.

1.5 Mécanique quantique relativiste...

Notons enfin que, lorsque l'on étudie le comportement d'objets microscopiques dont la vitesse est proche de celle de la lumière, on utilise la mécanique quantique relativiste, formée par la réunion des deux théories précédemment introduites et dont l'équation maîtresse est dite : "équation de Dirac". Cette théorie est très utilisée en physique des particules ou en astrophysique.

