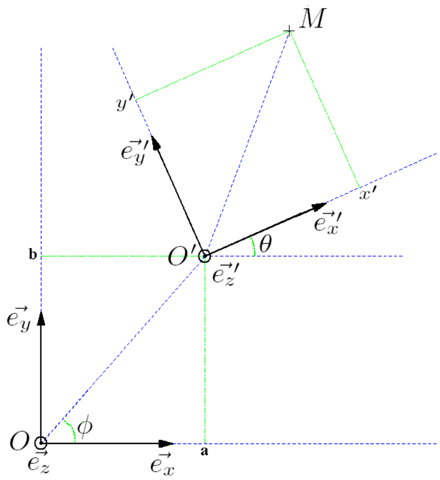
Chapitre 4

Mouvement relatif, changement de référentiel

4.1 Position du problème

4.1.1 Definitions et notations



Il est nécessaire de choisir un référentiel pour définir à chaque instant la position, la vitesse et l'accélération d'un objet. Souvent, le référentiel choisi est celui dans lequel le physicien observe le mouvement. Mais quelques fois, ce référentiel est peu adapté à une description cinématique simple et il est plus avantageux d'utiliser un référentiel relatif. Soit $\Re$ un référentiel "fixe" ou "absolu" lié à l'observateur, et $\Re'$ un référentiel "mobile" ou "relatif". Nous allons chercher comment se transforment les vecteurs position, vitesse et accélération lorsque l'on passe d'un référentiel à l'autre.

Remarque : Les termes "fixe" et "mobile" n'ont pas de signification intrinsèque. Ce qui est important, c'est que les deux référentiels soient en mouvement l'un par rapport à l'autre. Il est préférable, cependant, que le référentiel "fixe" soit un référentiel galiléen.

Référentiel absolu $\Re$
- Système d'axe $[Ox), [Oy), [Oz)$
- Repère $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$
- Vecteur $\vec{OO'} = a.\vec{e_x} + b.\vec{e_y} + c.\vec{e_z}$

Référentiel relatif $\Re'$
- Système d'axe $[Ox'), [Oy'), [Oz')$
- Repère $\{\vec{e_x'}, \vec{e_y'}, \vec{e_z'}\}$
- Vecteur $\vec{O'M} = x'.\vec{e_x'} + y'.\vec{e_y'} + z'.\vec{e_z'}$

On note :

- $\vec{v}_{(M/\Re)}$ la vitesse du point M dans le référentiel absolu $\Re$
- $\vec{v}_{(M/\Re')}$ la vitesse du point M dans le référentiel relatif $\Re'$
- $\vec{v}_{(\Re'/\Re)}$ la vitesse d'entrainement de $\Re'$ dans $\Re$, c'est à dire la vitesse qu'aurait le point M dans $\Re$ s'il était fixe par rapport à $\Re'$

- $\vec{a}_{(M/\Re)}$ l'accélération du point M dans le référentiel absolu $\Re$
- $\vec{a}_{(M/\Re')}$ l'accélération du point M dans le référentiel relatif $\Re'$
- $\vec{a}_{(\Re'/\Re)}$ l'accélération d'entrainement de $\Re'$ dans $\Re$, c'est à dire l'accélération qu'aurait le point M dans $\Re$ s'il était fixe par rapport à $\Re'$

Attention : $\vec{v}_{(\Re'/\Re)} \neq \vec{v}_{(O'/\Re)}$ et $\vec{a}_{(\Re'/\Re)} \neq \vec{a}_{(O'/\Re)}$. La vitesse (accélération) d'entrainement n'est pas la vitesse (accélération) du point O' par rapport au référentiel absolu car, si tel était le cas, nous aurions omit la possibilité d'une rotation du référentiel $\Re'$ par rapport à $\Re$

Remarque 1 : Les vecteurs position, vitesse et accélération, qu'ils soient considérés dans le référentiel absolu ou relatif, sont avant tout des vecteurs au sens mathématique du terme. De ce fait, ils peuvent être exprimés à la fois dans les ***repères*** *$\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$ ou $\{\vec{e_x'}, \vec{e_y'}, \vec{e_z'}\}$. Il s'agit, là encore, de ne pas confondre les notions de* ***repère*** *et de* ***référentiel****. Toutefois, pour rendre la notion de "changement de référentiel" plus intuitive, nous adopterons les règles suivantes :*

- *La position, la vitesse et l'accélération d'un point M dans le référentiel absolu seront exprimées dans la base des vecteurs du repère lié au référentiel absolu $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$*

- *La position, la vitesse et l'accélération du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu seront exprimées dans la base des vecteurs du repère lié au référentiel absolu $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$*

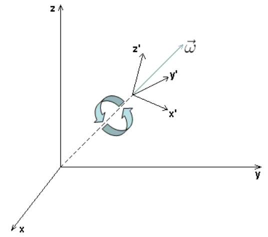
- *La position, la vitesse et l'accélération d'un point M dans le référentiel relatif seront exprimées dans la base des vecteurs du repère lié au référentiel relatif $\{\vec{e_x'}, \vec{e_y'}, \vec{e_z'}\}$*

4.1.2 Mouvement d'entrainement : translation et/ou rotation de $\Re'$ par rapport à $\Re$

Lorsque θ est fixe ($\dot{\theta} = 0$), le référentiel relatif $\Re'$ est en *translation* par rapport au référentiel absolu $\Re$: quelques soient les variations du vecteur $\vec{OO'}$, les vecteurs de base $\{\vec{e_x}, \vec{e_x'}\}$, $\{\vec{e_y}, \vec{e_y'}\}$ et $\{\vec{e_z}, \vec{e_z'}\}$ forment toujours le même angle entre eux.

Lorsque le vecteur $\vec{OO'}$ est fixe ($\frac{d}{dt}\vec{OO'} = 0$), et que θ est variable dans le temps ($\dot{\theta} \neq 0$), le référentiel relatif $\Re'$ est en *rotation* par rapport au référentiel absolu $\Re$.

Dans le cas général, lorsque le vecteur $\vec{OO'}$ et l'angle θ sont variables dans le temps, le référentiel relatif $\Re'$ est en *translation et en rotation* par rapport au référentiel absolu $\Re$. C'est le cas pour lequel nous allons établir les relations de passage du référentiel relatif au référentiel absolu et inversement.



Remarque : pour des raisons de clarté, il apparait dans le schéma ci-dessus que le vecteur $\vec{e_z}$ est toujours colinéaire au vecteur $\vec{e_z'}$: même si une telle configuration est souvent rencontrée en pratique, elle ne constitue pas le cas général. Dans la suite, nous imaginons un référentiel en translation et en rotation par rapport à un autre, pour le lequel le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est quelconque (c.f. figure ci-contre)

4.2 Composition du vecteur position

En utilisant la relation de Chasles, il vient naturellement : $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$. Il s'agit de la loi de composition du vecteur position.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{OO'} + \vec{O'M} && (4.1)\\ \vec{OM} &= (a.\vec{e_x} + b.\vec{e_y} + c.\vec{e_z}) + \left(x'.\vec{e_x'} + y'.\vec{e_y'} + z'.\vec{e_z'}\right) && (4.2)\end{aligned}}$$

Il est possible d'exprimer les vecteurs de base du repère relatif en fonction des vecteurs de base du repère absolu pour que ne subsistent que des termes (composantes) selon $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$.

4.3 Composition du vecteur vitesse

Connaissant l'expression de changement de référentiel pour le vecteur position, il ne reste plus qu'à dériver cette dernière pour obtenir la loi de composition du vecteur vitesse. On note $\frac{d}{dt}\big|_{\Re}\left(\vec{V}\right)$ la dérivée du vecteur $\vec{V}$ par rapport au temps et par rapport au référentiel $\Re$. Dans la suite, $\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}$ est le vecteur rotation du référentiel relatif $\Re'$ par rapport au référentiel absolu $\Re$:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{(M/\Re)} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\Re}\left(\vec{OM}\right) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{\Re}\left(\vec{O'M'}\right) && (4.3)\\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{e_x'} + x'\frac{d\vec{e_x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{e_y'} + y'\frac{d\vec{e_y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{e_z'} + z'\frac{d\vec{e_z'}}{dt}\right) && (4.4)\\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) + x'\frac{d\vec{e_x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{e_y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{e_z'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{e_x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e_y'}\frac{dz'}{dt}\vec{e_z'} && (4.5)\\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) + x'\left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{e_x'}\right) + y'\left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{e_y'}\right) + z'\left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{e_z'}\right) + \frac{dx'}{dt}\vec{e_x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e_y'}\frac{dz'}{dt}\vec{e_z'} &&\\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \underbrace{\left(x'\vec{e_x'} + y'\vec{e_y'} + z'\vec{e_z'}\right)}_{\vec{O'M}} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{e_x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e_y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{e_z'}}_{\frac{d}{dt}\big|_{\Re'}(\vec{O'M})} && (4.6)\\
&= \underbrace{\left.\frac{d}{dt}\right|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{O'M}}_{\vec{v}_{(\Re'/\Re)}} + \underbrace{\left.\frac{d}{dt}\right|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right)}_{\vec{v}_{(M/\Re')}} && (4.7)\\
&= \vec{v}_{(\Re'/\Re)} + \vec{v}_{(M/\Re')} && (4.8)
\end{aligned}$$

L'expression $\frac{d}{dt}\big|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right)$ n'a pas été explicitée dans le calcul ci-dessus pour des raisons de clarté essentiellement. Son expression est très simple : si $\vec{OO'} = a.\vec{e_x} + b.\vec{e_y} + c.\vec{e_z}$, alors $\frac{d}{dt}\big|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) = \frac{da}{dt}.\vec{e_x} + \frac{db}{dt}.\vec{e_y} + \frac{dc}{dt}.\vec{e_z}$. Les termes en $\frac{d\vec{e_x}}{dt}$, $\frac{d\vec{e_y}}{dt}$ et $\frac{d\vec{e_z}}{dt}$ sont nuls puisque $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ sont fixes dans le référentiel absolu.

En pratique, lors du calcul de $\vec{v}_{(M/\Re')}$, il ne faut dériver par rapport au temps **que** les **composantes** du vecteur $O'\vec{M}$: autrement dit, on considère ici que les vecteurs de base du référentiel relatif sont "fixes". Cette notion est exprimée à travers la notation $\frac{d}{dt}\big|_{\Re'}$. Il faut imaginer que l'on place temporairement l'observateur dans le référentiel indiqué par la notation $\frac{d}{dt}\big|_{\Re'}$ avant de dériver par rapport au temps.

La vitesse d'entraînement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu fait intervenir un terme en $\frac{d}{dt}\big|_{\Re}(OO')$ qui traduit une vitesse de *translation*, tandis que le terme en $\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge O'\vec{M}$ traduit la rotation éventuelle du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu. N'oubliez pas ce terme lors de la composition des vitesses ! ! !

4.4 Composition du vecteur accélération

Pour établir la loi de composition du vecteur accélération, nous procédons exactement de la même manière que précédemment, en dérivant par rapport au temps le vecteur vitesse. Il vient :

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_{(M/\Re)} &= \frac{d}{dt}\bigg|_{\Re}\left(\vec{v}_{(M/\Re)}\right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{\Re}\left(\vec{v}_{(\Re'/\Re)}\right) + \frac{d}{dt}\bigg|_{\Re}\left(\vec{v}_{(M/\Re')}\right) \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{\Re}\left(O\vec{O}'\right) + \frac{d}{dt}\left(x'\frac{d\vec{e_x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{e_y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{e_z'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{e_x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e_y'}\frac{dz'}{dt}\vec{e_z'}\right) \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{\Re}\left(O\vec{O}'\right) + \left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{e_x'}}{dt} + x'\frac{d^2\vec{e_x'}}{dt^2} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{e_y'}}{dt} + y'\frac{d^2\vec{e_y'}}{dt^2} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{e_z'}}{dt} + z'\frac{d^2\vec{e_z'}}{dt^2}\right) \\
&\qquad + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e_x'} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{e_x'}}{dt} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e_y'} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{e_y'}}{dt} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e_z'} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{e_z'}}{dt}\right) \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{\Re}\left(O\vec{O}'\right) + \left(2\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{e_x'}}{dt} + 2\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{e_y'}}{dt} + 2\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{e_z'}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e_x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e_y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e_z'}\right) + \left(x'\frac{d^2\vec{e_x'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{e_y'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{e_z'}}{dt^2}\right) \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{\Re}\left(O\vec{O}'\right) + \left(2\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{e_x'}}{dt} + 2\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{e_y'}}{dt} + 2\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{e_z'}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e_x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e_y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e_z'}\right) \\
&\qquad + \left[x'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{e_x'}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{e_y'}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{e_z'}\right)\right] \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{\Re}\left(O\vec{O}'\right) + \left(2\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{e_x'}}{dt} + 2\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{e_y'}}{dt} + 2\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{e_z'}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e_x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e_y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e_z'}\right) \\
&\qquad + \left[x'\left(\frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge \vec{e_x'} + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \frac{d\vec{e_x'}}{dt}\right) + y'\left(\frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge \vec{e_y'} + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \frac{d\vec{e_y'}}{dt}\right) + z'\left(\frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge \vec{e_z'} + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \frac{d\vec{e_z'}}{dt}\right)\right] \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{\Re}\left(O\vec{O}'\right) + \left(2\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{e_x'}}{dt} + 2\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{e_y'}}{dt} + 2\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{e_z'}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e_x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e_y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e_z'}\right) \\
&\qquad + \left[\frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge \left(x'.\vec{e_x'} + y'.\vec{e_y'} + z'.\vec{e_z'}\right) + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \left(x'.\frac{d\vec{e_x'}}{dt} + y'.\frac{d\vec{e_y'}}{dt} + z'.\frac{d\vec{e_z'}}{dt} +\right)\right] \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{\Re}\left(O\vec{O}'\right) + 2\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \underbrace{\left(\frac{dx'}{dt}\vec{e_x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e_y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{e_z'}\right)}_{\frac{d}{dt}\big|_{\Re'}(O'\vec{M})} + \underbrace{\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e_x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e_y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e_z'}\right)}_{\frac{d^2}{dt^2}\big|_{\Re'}(O'\vec{M})} + \frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge \underbrace{\left(x'.\vec{e_x'} + y'.\vec{e_y'} + z'.\vec{e_z'}\right)}_{O'\vec{M}} \\
&\qquad + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \underbrace{\left(x'.\vec{e_x'} + y'.\vec{e_y'} + z'.\vec{e_z'}\right)}_{O'\vec{M}}\right) \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{\Re}\left(O\vec{O}'\right) + \frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge O'\vec{M} + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge O'\vec{M}\right) + 2\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{\Re'}\left(O'\vec{M}\right)\right)}_{\vec{v}_{(M/\Re')}} + \underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{\Re'}\left(O\vec{M}'\right)}_{\vec{a}_{(M/\Re')}} \\
&= \underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{\Re}\left(O\vec{O}'\right) + \frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge O'\vec{M} + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge O'\vec{M}\right)}_{\vec{a}_{(\Re'/\Re)}} + 2\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{v}_{(M/\Re')} + \vec{a}_{(M/\Re')} \\
&= \vec{a}_{(\Re'/\Re)} + \vec{a}_c + \vec{a}_{(M/\Re')}
\end{aligned}
$$

De la même manière que précédemment, l'expression $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re}\left(O\vec{O}'\right)$ n'a pas été explicitée dans le calcul ci-dessus pour des raisons de clarté essentiellement. Son expression est très simple : si $O\vec{O}' = a.\vec{e_x} + b.\vec{e_y} + c.\vec{e_z}$, alors $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re}\left(O\vec{O}'\right) = \frac{d^2a}{dt^2}.\vec{e_x} + \frac{d^2b}{dt^2}.\vec{e_y} + \frac{d^2c}{dt^2}.\vec{e_z}$. Les termes en $\frac{d\vec{e_x}}{dt}$, $\frac{d\vec{e_y}}{dt}$ et $\frac{d\vec{e_z}}{dt}$ sont nuls puisque $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ sont fixes dans le référentiel absolu.

La composition des accélérations fait naturellement apparaître une accélération d'entraînement d'un référentiel par rapport à l'autre ($\vec{a}_{(\Re'/\Re)}$) ainsi qu'une accélération relative ($\vec{a}_{(M/\Re')}$). Mais elle fait aussi apparaître un terme d'accélération supplémentaire : l'accélération de Coriolis ($\vec{a}_c$). Cette accélération n'a pas de sens physique évident : il s'agit d'un terme apparaissant de manière purement mathématique. En pratique, l'accélération de Coriolis est à l'origine de nombreux phénomènes physiques naturels dû à la rotation de la terre sur elle-même, tels que les vortex de courant marin ou atmosphérique, l'usure inégale des rails de train sur l'axe Paris-Marseille etc...

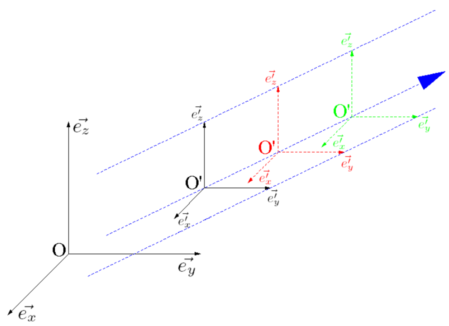
4.5 Exemples et discussion

4.5.1 Cas où le mouvement de $\Re'$ par rapport à $\Re$ est une translation

$\Re'$ est en translation rectiligne par rapport à $\Re$ si les directions liées à $\Re'$ sont fixes dans $\Re$. Il vient : $\frac{d}{dt}\left(\vec{e'_x}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{e'_y}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{e'_z}\right) = 0$.

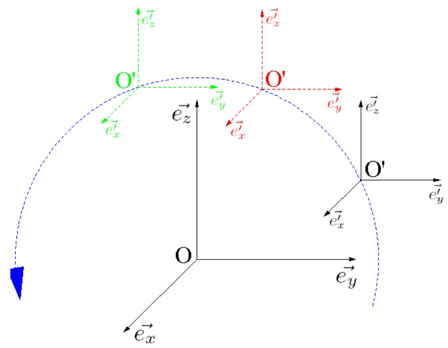
Translation rectiligne

Une translation est rectiligne si l'origine O' de $\Re'$ a une trajectoire rectiligne par rapport à $\Re \Leftrightarrow \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} = \vec{0}$



Translation circulaire

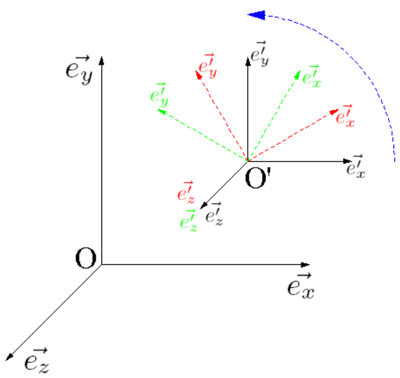
Une translation est circulaire si l'origine O' de $\Re'$ a une trajectoire circulaire par rapport à $\Re \Leftrightarrow \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} = \vec{0}$



L'expression de la composition des vitesses devient : $\vec{v}_{(M/\Re)} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OO'}\right) + \frac{d}{dt}\Big|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right)$

L'expression de la composition des accélérations devient : $\vec{a}_{(M/\Re)} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{OO'}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right)$

4.5.2 Cas où le mouvement de $\Re'$ par rapport à $\Re$ est une rotation uniforme autour d'un axe fixe [Oz]



Dans ce cas, les directions des vecteurs de base liés à $\Re'$ ne sont pas fixes dans $\Re$. Il vient : $\frac{d}{dt}\left(\vec{e'_x}\right) \neq 0$, $\frac{d}{dt}\left(\vec{e'_y}\right) \neq 0$, $\frac{d}{dt}\left(\vec{e'_z}\right) \neq 0$. Par contre, le vecteur $\vec{OO'}$ est fixe, donc $\frac{d}{dt}\left(\vec{OO'}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{OO'}\right) = 0$. De plus, la rotation étant uniforme, autour de l'axe [Oz] $\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} = \vec{C^{te}} = \omega.\vec{e_z}$ donc les termes en $\dot{\vec{\omega}}_{(\Re'/\Re)}$ valent zéro.

L'expression de la composition des vitesses devient :
$\vec{v}_{(M/\Re)} = \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{O'M} + \frac{d}{dt}\Big|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right)$

L'expression de la composition des accélérations devient :

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{(M/\Re)} &= \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{O'M}\right) + \left[2\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \frac{d}{dt}\Big|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right)\right] + \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right) \\
&= \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{O'M}\right) + \left(2\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{v}_{(M/\Re')}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right)
\end{aligned}$$

Exemple : si $\vec{OM'} = A.t.\vec{e'_x}$ et $\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} = \omega.\vec{e_z}$, on a :

$\vec{a}_{(M/\Re)} = \omega.\vec{e_z} \wedge \left(\omega.\vec{e_z} \wedge A.t.\vec{e'_x}\right) + \left(2\omega.\vec{e_z} \wedge \frac{d}{dt}\Big|_{(\Re')}\left(A.t\vec{e'_x}\right)\right) + \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re'}\left(A.t\vec{e'_x}\right)$

$\vec{a}_{(M/\Re)} = \omega.\vec{e_z} \wedge \left(A.\omega.t.\vec{e'_y}\right) + \left(2\omega.\vec{e_z} \wedge A.\vec{e'_x}\right) + 0$

$\vec{a}_{(M/\Re)} = -A.\omega^2.t.\vec{e'_x} + 2.\omega.A.\vec{e'_y}$