Chapitre 5

Dynamique

La dynamique est l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et les causes qui le produisent. En physique contemporaine, ces "causes" portent aussi le nom d'interactions. En mécanique classique, les interactions sont décrites par des entités mathématiques (des vecteurs) appelées "les forces". En ce sens, l'étude de la dynamique est l'analyse de la relation entre les forces et les variations de mouvement d'un corps.

5.1 Masse et principe d'inertie

5.1.1 Notion de masse

La masse dite "inerte" est un coefficient (scalaire) caractéristique de chaque particule qui détermine le comportement de cette dernière lorsqu'elle interagit avec d'autre particules. En d'autres termes, la masse d'une particule caractérise sa réponse vis-à-vis d'une force. La masse est une grandeur additive dont l'unité est le Kilogramme. Ainsi, pour connaitre la masse d'un corps, il suffit d'additionner la masse de chacune des particules le constituant. En pratique, on obtient la masse d'un corps en le comparant à la masse d'un corps étalon en utilisant, par exemple, une balance. En mécanique classique, la masse est invariante dans le temps et ne dépend pas des référentiels : c'est une caractéristique intrinsèque d'un corps ou d'un point matériel.

Une autre définition de la masse peut aussi être proposée, à partir de l'interaction de gravitation entre deux points massiques. On parle alors de "masse grave". Il n'est pas évident, a priori, que les deux définitions de la masse coïncident. L'expérience montre cependant l'identité des deux masses avec une précision très élevée !

5.1.2 Principe d'inertie - 1^{re} loi de Newton

Le principe d'inertie (ou première loi de Newton) est énoncé de la façon suivante :

> Un point matériel isolé (n'étant soumis à aucune interaction) se déplace toujours avec une vitesse constante, c'est à dire sans accélération. Dans un référentiel Galiléen, la trajectoire d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme.

La masse constitue un rôle clef dans le principe d'inertie, puisqu'elle va caractériser la réponse d'un corps matériel vis-à-vis de son interaction avec d'autres corps. Par exemple, considérons un point matériel de masse M, isolé, ayant une trajectoire rectiligne uniforme dans un référentiel Galiléen. A un certain temps t, ce point matériel "ressent" une force $\vec{F}$ donnée (interaction à distance dû à un autre corps, ou collision). Si sa masse est très grande (M»1), cette force n'aura que peu d'influence sur la trajectoire du point matériel et ce dernier continuera sa course comme si rien ne s'était passé. Au contraire, si sa masse est très faible, la force qui lui est appliqué va brutalement l'accélérer, le décélérer, ou le faire changer de direction. Nous avons vu que les variations du mouvement (c'est à dire les variations du vecteur vitesse) représentent aussi la notion d'accélération... Il n'est donc pas étonnant, comme nous le verrons plus tard, que cette dernière soit égale au rapport de la force sur la masse : $\vec{a} = \vec{F}/M$...

Réciproquement, l'expression ci-dessus implique que plus un corps est massique, plus il faudra lui appliquer une force "conséquente" pour pouvoir le détourner de son mouvement rectiligne uniforme (dans un référentiel Galiléen). Ceci est valable pour accélérer un corps, pour le décélérer, ou bien simplement pour changer sa direction. Voici quelques exemples permettant d'apprécier qualitativement le principe d'inertie :

– Lorsqu'un avion A380 est à l'arrêt, sur la piste d'envol, il a besoin d'une force importante (plusieurs turbo-réacteurs) pour pouvoir prendre de la vitesse - c'est à dire accélérer - et enfin décoller. En effet, sa masse conséquente s'oppose à une quelconque variation de vitesse... L'avion, immobile au départ, "souhaite" le rester !

- Ce même avion (A380) s'apprête à atterrir... Une fois que les roues ont touché la piste d'atterrissage, la vitesse de l'avion est toujours très importante. De la même manière que précédemment, il est nécessaire de freiner "fort" pour pouvoir stopper l'avion : là encore, son inertie s'oppose à toute variation de vitesse, même s'il s'agit dans ce cas là, de la réduire. Initialement, l'avion possède une vitesse et "souhaite" la maintenir !

- Un moustique est en train de voler paisiblement à vitesse constante... lorsqu'une légère brise se lève ! Ce dernier va se mettre à tourbillonner au grès des mouvements d'air dans lesquels il se trouve. Ici, sa faible masse ne constitue pas un frein aux forces qui lui sont appliquées. Par conséquent, même si le moustique est soumis de très faibles forces, son accélération est grande et de ce fait, sa trajectoire va beaucoup varier.

Le concept d'inertie n'est pas propre à la mécanique. De nombreuses analogies peuvent être rencontrées dans d'autres domaines tels qu'en électricité ou en thermodynamique. Dans un circuit électrique, l'inertie est présente au travers de son inductance L, car cette grandeur représente la tendance naturelle d'un circuit à s'opposer à toutes **variations de courant**... En thermodynamique, l'inertie d'un corps est relié à sa capacité calorifique C, car cette grandeur contrôle les **variations de température** de ce dernier pour un même apport d'énergie. Poussons l'analogie jusqu'en Sciences Humaines : ne dit-on pas qu'un projet complexe présente beaucoup d'inertie lorsque son avancement (ou sa stagnation) est faible vis-à-vis de l'effort humain déployé ? Dans chacun de ces cas, plus l'inertie est grande, plus la réponse du système aux sollicitations extérieures sera faible.

5.2 Quantité de mouvement et chocs

5.2.1 Définition

La quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un point matériel est défini comme le produit de sa masse m par sa vitesse $\vec{v}$: $\vec{p} = m.\vec{v}$

La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle, qui a la même direction que la vitesse. C'est une notion physique très importante car elle combine les deux éléments qui caractérise l'état dynamique d'un point matériel : sa masse et sa vitesse. Son unité est le $m.Kg.s^{-1}$ ($[L][M][T]^{-1}$). Il s'agit d'une quantité additive : si le système considéré est composé de plusieurs points matériels indexés par i, il vient :

$$\boxed{\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i.\vec{v}_i \qquad (5.1)}$$

La quantité de mouvement est une grandeur qui dépend du référentiel d'observation. Tout comme l'énergie, elle ne possède donc pas de "zero" absolu. Seules les variations de quantité de mouvement possèdent un sens physique !

5.2.2 Principe de conservation de la quantité de mouvement

En mécanique classique, une interaction (une force) d'un corps sur un autre produit un échange de quantité de mouvement. La variation de la quantité de mouvement d'un corps dans un certain intervalle de temps est égale et opposée à la variation de la quantité de mouvement de l'autre corps pendant le même intervalle de temps.

Il est possible de généraliser cette expression et de la ré-écrire d'une manière plus formelle :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{La quantité de mouvement totale} & & \text{d'un système isolé est constante} \\ \vec{p} & = & \sum_i \vec{p}_i = C^{te} \end{array}}$$

Il s'agit d'un principe physique *non-démontrable*. Il n'est justifié que dans la mesure où aucune expérience n'a pu l'infirmer [1].

5.2.3 Les chocs ou collisions

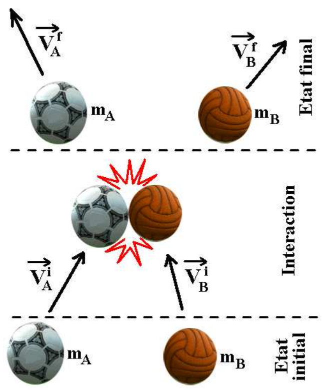
Lorsque deux corps s'approchent l'un de l'autre, leur interaction mutuelle modifie leur mouvement, produisant de ce fait un échange de quantité de mouvement et d'énergie. Lorsqu'un tel évènement se produit, il s'agit d'un choc. Cela ne signifie pas nécessairement que les deux corps ont été en contact l'un avec l'autre. En général, une interaction appréciable a lieu lorsque les corps sont proches l'un de l'autre, produisant une variation mesurable de leur mouvement pendant un temps relativement court. On distingue deux types de chocs : ceux dits "élastiques" et ceux dits "inélastiques".

Une étude approfondie des chocs à une dimension et à deux dimensions sera dispensée pendant la séance de TP ! Ne négligez pas cette séance : les notions abordées sont essentielles et complètent le cours !

1. En réalité, il a fallut attendre l'avènement de la mécanique quantique et en particulier de la théorie QED (Quantum Electro Dynamics) pour mettre en défaut ce principe... Mais pour l'instant, ces considérations sortent largement du cadre de ce cours !

les chocs élastiques

Soit un système isolé constitué de deux corps massiques. Une collision entre ces deux corps est "élastique" lorsque la *quantité de mouvement* **et** *l'énergie cinétique* totale du système sont conservées entre les états initiaux et finals. Cela suppose, en particulier, que l'énergie interne des corps en question n'a pas été modifiée (échauffement, déformation, échange de matière, réaction chimique) au cours du choc.



Dans l'exemple ci-contre, un "point matériel" A de masse m_A et de vitesse initiale $\vec{v}_A^i$ entre en collision avec une autre "point matériel" B de masse m_B et de vitesse initiale $\vec{v}_B^i$. Après la collision, les masses respectives des points matériels A et B n'ont pas changé, mais leurs vitesses sont caractérisées par les vecteurs $\vec{v}_A^f$ et $\vec{v}_B^f$. Pour connaitre ces vitesses en fonction des paramètres initiaux, il suffit d'écrire le **système** d'équations suivant, caractérisant la conservation de la quantité de mouvement $\vec{p}$ et de l'énergie cinétique E_c :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_A.(v_A^i)^2 + \frac{1}{2}m_B.(v_B^i)^2 = \frac{1}{2}m_A.(v_A^f)^2 + \frac{1}{2}m_B.(v_B^f)^2 \\ \\ m_A.\vec{v}_A^i + m_B.\vec{v}_B^i = m_A.\vec{v}_A^f + m_B.\vec{v}_B^f \end{cases}$$

Il ne reste plus alors qu'à projeter la seconde relation vectorielle sur les vecteurs de base du repère choisi, faisant apparaitre les composantes des vecteurs vitesses, puis à résoudre le <u>système d'équation</u> résultant !

les chocs inélastiques

Soit un système isolé constitué de deux corps massiques. Une collision entre ces deux corps est "inélastique" lorsque la *quantité de mouvement* **uniquement** du système est conservée entre les états initiaux et finals. Une collision inélastique suppose que l'énergie interne de l'un des corps (ou des deux) a été modifiée par échauffement, déformation ou échange de matière par exemple. Bien sûr, l'énergie totale du système (Énergie cinétique + Énergie interne) est toujours conservée dans un système isolé.

Photo ci-dessus : choc inélastique entre une balle de révolver et un oeuf. Une partie de l'énergie cinétique de la balle a été transférée à l'oeuf, pour le déformer et le faire exploser. Au cours de ce choc, la quantité de mouvement totale est conservée.

5.3 Notion de force

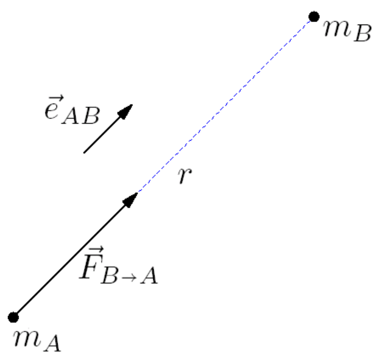
5.3.1 Généralités

L'ensemble des phénomènes physiques et chimiques observés sont basés sur la notion d'interaction, au cours de laquelle un échange d'énergie, de matière ou de quantité de mouvement a lieu entre deux entités physiques distinctes. Il existe 4 interactions fondamentales de nature différentes : l'interaction gravitationnelle, l'interaction faible, l'interaction forte et l'interaction électromagnétique. Nous avons déjà mentionné que, en mécanique classique, les interactions entre points matériels peuvent être décrites par des grandeurs vectorielles appelées "forces". L'ensemble des forces observées dans la nature ne sont que la manifestation macroscopique des 4 interactions décrites ci-dessus. Nous admettrons que les forces ne dépendent pas du référentiel d'observation. La force résultant de plusieurs actions mécaniques est égale à la somme vectorielle des forces dues à chacune de ces actions.

L'unité de force est le Newton (N). on a $1N = 1Kg.m.s^{-1}$. Sa dimension est : $[M][L][T]^{-1}$. En mécanique, on définit le "point d'application" d'une force comme étant l'endroit du système sur lequel la force en question s'exerce. Les forces sont dites ponctuelles lorsqu'elle sont appliquées en un point particulier du corps étudié, ou bien reparties lorsqu'elles s'exercent sur une surface (ou un volume) non-réduit à un point. Cependant, les forces sont avant tout des vecteurs et d'un point de vue mathématique, la notion de "point d'application" n'existe pas !

5.3.2 Les forces usuelles

La force de gravitation

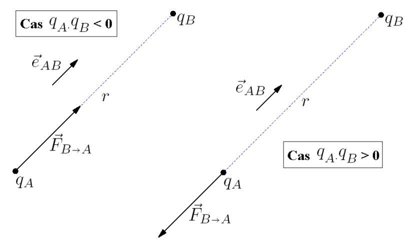


La force gravitationnelle est une force toujours attractive qui agit entre deux corps massifs. L'expression de la force exercée par un corps B de masse m_B sur un corps A de masse m_A se note :

$$\vec{F}_{B\to A} = G.\frac{m_A.m_B}{r^2}\ \vec{e}_{AB}$$

où r est la distance entre les corps A et B, $\vec{e}_{AB}$ est un vecteur unitaire dirigé selon $\vec{AB}$ et $G = 6.67.10^{-11}\ m^3.Kg^{-1}.s^{-2}$ est la constante universelle de gravitation. L'intensité de la force gravitationnelle est extrêmement faible (c'est la plus faible des quatre interactions fondamentales). Ainsi, ses effets ne sont perceptibles que lorsque des objets très massifs sont en jeu.

La force électrique (ou force de Coulomb)



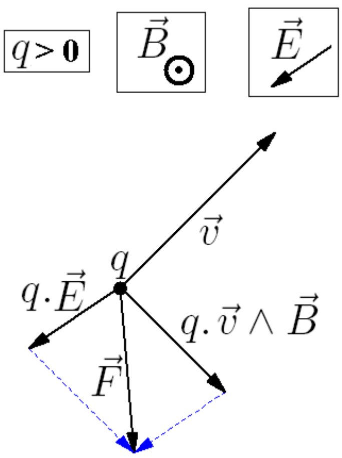
La force électrique traduit l'interaction entre deux corps ponctuels A et B portant respectivement les charges q_A et q_B. S'ils sont séparés d'une distance r, la force exercée par le corps B sur le corps A est :

$$\vec{F}_{B\rightarrow A} = -k.\frac{q_A.q_B}{r^2}\ \vec{e}_{AB}$$

ou $k \approx 9.10^9\ Kg.m^3.A^{-2}.s^{-4}$ est la constante de Coulomb et $\vec{e}_{AB}$ est un vecteur unitaire dirigé selon $\vec{AB}$. Si les charges sont de même signe, elles ont tendance à se repousser. Si elles sont de signes différents, elle ont tendance à s'attirer.

Les forces électrostatiques peuvent quelques fois se manifester à l'échelle macroscopique (attirance ou répulsion entre deux objets chargés) mais leur portée reste cependant relativement faible. En effet, la matière est globalement neutre à l'échelle macroscopique : électrons et protons jouent des rôles antagonistes, les uns annulant les effets des autres.

La force électromagnétique (ou force de Lorentz)

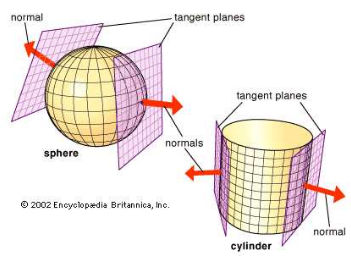


La force électromagnétique traduit l'interaction entre une particule chargée (de charge q), ayant une vitesse $\vec{v}$, avec un champ magnétique $\vec{B}$ et électrique $\vec{E}$. Mathématiquement, elle est notée :

$$\vec{F} = q.\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)$$

Nous notons que le champ électrique $\vec{E}$ est généré par des charges et, en l'absence de champ magnétique, la force de Lorentz est équivalente à la force de Coulomb. Le champ magnétique $\vec{B}$, quand à lui, est génère par des charges en mouvement (courant électrique). On montre cependant que le champ magnétique n'est que la conséquence de la déformation relativiste du champ électrique. Fondamentalement, la force électromagnétique n'est qu'une seule et même force, basée sur l'interaction entre deux particules chargées. En pratique, il est cependant beaucoup plus aisé d'introduire le champ "électrique" et "magnétique" dans le traitement des forces électromagnétiques.

Les forces de contact

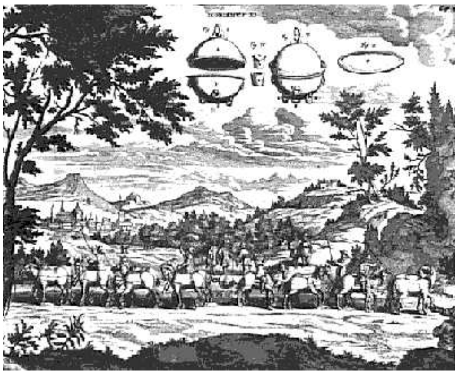


Forces de contact appliquees par la sphere (le cylindre) sur les plans tangents

Les forces de contact, aussi appelées forces de réaction, sont toujours dirigées selon la normale à la surface de contact (plan tangent) entre deux corps (pour cette raison, elles sont souvent représentées par la notation $\vec{N}$). Les forces de contact traduisent le fait que deux corps solides ne peuvent pas s'interpénétrer. En effet, lorsque deux corps solides sont suffisamment proches l'un de l'autre, les noyaux (charges positives) des atomes dont ils sont constitués se repoussent fortement (sauf s'il y a réaction chimique !). Microscopiquement, la force de Coulomb est donc bien à l'origine des forces de contacts.

Le terme "force de contact" prête à confusion : tout comme la force gravitationnelle, la force de Coulomb agit "à distance" et les noyaux des différents corps n'ont pas besoin de "se toucher" pour exercer une force l'un sur l'autre. Les interactions élémentaires traduisant les forces de contact ont bien lieu "à distance", mais cette dernière est si petite à notre échelle que nous avons tendance à extrapoler et à penser qu'elle est nulle.

Relation entre force et pression

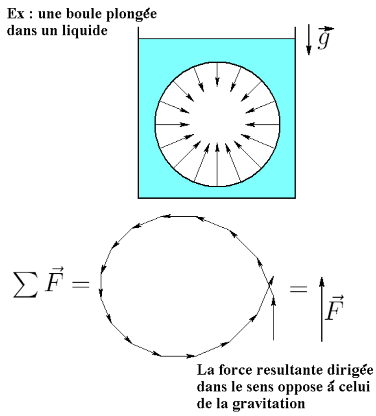


Expérience de la "sphère de Magdebourg"

Par définition, la pression correspond à une force par unité de surface. Son unité élémentaire est N/m^2 (ou $Kg/m/s^2$), bien que l'on utilise aussi le Bar, le Pascal ou "mm de Hg". Lorsqu'une force agit ponctuellement, la notion de pression n'a évidement pas de sens... Le concept de pression, bien que général, est particulièrement adapté lorsque l'on considère des forces hydrostatiques. Ces dernières s'appliquent sur un objet lorsqu'il est plongé dans un liquide ou un gaz : microscopiquement, chacune des molécules en contact avec l'objet exercent de très petites "forces de contact" (i.e ; collision des molécules avec la surface de l'objet). Leur très grand nombre, leur action répétée dans le temps et leur répartition uniforme à la surface de l'objet contribue à les assimiler à une force constante. Considérons un élément de surface $\vec{dS}$ de l'objet soumis à la pression P, la force résultante (sur l'élément de surface considéré) sera donnée par : $\vec{dF} = P.\vec{dS}$. Pour obtenir la force globale appliquée sur l'objet, il suffit d'intégrer cette expression sur l'ensemble de sa surface S soumis à la pression P, soit $\vec{F} = \iint_S P.\vec{dS}$.

Lorsque la pression est constante et que la surface S d'un objet est fermée, on remarque naturellement que la force globale appliquée sur l'objet est nulle. Cependant, lorsque la pression s'exerçant sur les parois d'un objet de surface fermée n'est pas uniforme, soit $P_i = P_{(x_i,y_i,z_i)}$, il en résulte une force globale susceptible de le déplacer. L'exemple le plus concret est certainement donné par "la poussée d'Archimède" détaillée ci-dessous.

La force d'Archimède

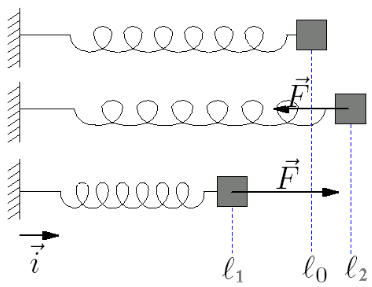


Énoncé du principe d'Archimède : tout corps plongé dans un fluide (liquide ou gaz) soumis à un champ de gravité, subit une force égale au poids du fluide déplacé par le corps. La direction de cette force est la même que celle du champ de gravité, mais son sens est opposé.
Soit une boule de volume V complètement immergée dans un liquide de masse volumique ρ. Le système est soumis au champ de gravitation terrestre $\vec{g} = -g.\vec{e}_z$.
L'expression de la force d'Archimède s'écrit :

$$\vec{F} = \rho.V.g.\vec{e}_z$$

Cette force provient de l'augmentation de la pression du fluide avec la profondeur : la pression étant plus forte sur la partie inférieure d'un objet immergé que sur sa partie supérieure, il en résulte une poussée globalement verticale orientée vers le haut.

La force de rappel d'un ressort



La force de rappel d'un ressort s'exprime par :

$$\vec{F} = -k\,(\ell - \ell_0)\,.\vec{i} \qquad \text{[valable uniquement pour } (\ell - \ell_0) << \ell_0\text{]}$$

ou k $(N.m^{-1})$ est une constante caractéristique du ressort appelée "raideur du ressort", ℓ_0 est la longueur à vide du ressort et ℓ est la longueur à un instant t du ressort. $\vec{i}$ est un vecteur unitaire dirigé dans l'axe du ressort et orienté depuis son point d'attache jusqu'a son extrémité. La force de rappel change en amplitude et en sens selon la longueur du ressort. Microscopiquement, ce sont encore les forces de Coulomb qui sont responsables de la force de rappel !

Les forces de frottement

Les forces de frottement sont dûes à l'interaction entre les molécules de deux corps. Là encore, l'interaction élémentaire est la force de Coulomb. Le phénomène microscopique est très compliqué et dépend de nombreux facteurs tels que l'état, la nature et la vitesse des surfaces en glissement l'une par rapport à l'autre. On distingue deux types de frottement :

- Frottement de glissement solide
  La force de frottement de glissement solide s'oppose toujours au mouvement du corps, et par conséquent a un sens opposé à la vitesse. Expérimentalement, la force de frottement de glissement solide $\vec{F_g}$ peut être considérée comme proportionnelle au module de la force de réaction $\|\vec{N}\|$.

$$\vec{F_g} = -f.\|\vec{N}\|.\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

où f est un coefficient de frottement sans unité et $\vec{v}/\|\vec{v}\|$ désigne un vecteur unitaire dirigé selon la direction de $\vec{v}$. On distingue deux types de coefficients de frottement : f_s est le coefficient statique de frottement qui, lorsque multiplié par $\|\vec{N}\|$, donne la force minimum nécessaire pour mettre un mouvement relatif deux corps initialement en contact et immobiles l'un par rapport à l'autre. f_c est le coefficient cinétique de frottement qui, lorsque multiplié par $\|\vec{N}\|$, donne la force nécessaire pour maintenir deux corps en mouvement relatif uniforme. On note que $f_s > f_c$. En général, les coefficients de frottement sont soit des inconnues, soit des paramètres du problème.

– Frottement visqueux
Lorsqu'un corps se déplace dans un fluide (liquide ou gaz) à une vitesse relativement faible, la force de frottement est, en première approximation, proportionnelle à la vitesse, et de direction opposée.

$$\vec{F_v} = -\kappa.\eta.\vec{v} \quad \text{[valable uniquement pour de faibles vitesses !]}$$

ou κ est un coefficient lié à la forme du corps [2] et η est le coefficient de viscosité ($Pa.s^{-1}$ ou $Kg.m^{-1}.s^{-1}$) du fluide considéré.

5.4 Formulation de la RFD dans un référentiel Galiléen - deuxième loi de Newton

Dans la section 1.2 (principe d'inertie), nous avons vu comment les forces (ou les interactions) étaient à l'origine du mouvement des corps. Dans le chapitre 3, nous avons établi l'ensemble des relations cinématiques (position, vitesse et accélération) permettant de décrire mathématiquement n'importe quel type de mouvement... Mais nous ne savons toujours pas comment relier ces deux notions ! Comment décrire le mouvement d'un point matériel soumis à l'action de plusieurs forces ?

Et puis, Sir Isaac Newton écrit...

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}}$$

La Relation Fondamentale de la Dynamique qui devient, lorsque la masse ne varie pas au cours du temps...

$$\boxed{\sum \vec{F} = m.\vec{a}}$$

Cette relation, **valable uniquement dans un référentiel Galiléen**, établit le lien entre dynamique et cinématique, entre forces et accélération. Il s'agit d'une relation vectorielle. A travers cette relation, la masse d'un corps prend désormais un sens physique simple : elle conditionne la réponse d'un système (son accélération) lorsque ce dernier est soumis à des forces (les causes du mouvement). Elle exprime mathématiquement le principe d'inertie.

Dans le cas où la masse du système évolue au cours du temps, il convient d'utiliser l'expression

$$\sum \vec{F} = \tfrac{d}{dt}\vec{p} = \tfrac{d}{dt}(m.\vec{v}) = \tfrac{dm}{dt}.\vec{v} + m.\tfrac{d}{dt}\vec{v} = \tfrac{dm}{dt}.\vec{v} + m.\vec{a}$$

Il est nécessaire alors de connaitre la loi d'évolution de la masse du système au cours du temps.

5.5 Principe d'action et de réaction - troisième loi de Newton

Soit un système de deux corps A (de masse m_A) et B (de masse m_B), chargés positivement (q_A et q_B) et initialement très loin l'un de l'autre de manière à ce que leur interaction puisse être négligée. Nous supposons que le système (les deux corps) est isolé, et que les vitesses des deux corps sont opposées l'une de l'autre. La quantité de mouvement initiale du système vaut : $\vec{p} = m_A.\vec{v_A} + m_B.\vec{v_B}$. Le problème est unidimensionnel (1D). Au bout d'un certain temps, les corps vont se rapprocher l'un de l'autre de manière à ce que la force électrique exercée par le corps B sur le corps A ne puisse plus être négligée. Le corps A ressent donc une force, et sa vitesse va changer. Cependant, nous avons vu, dans la section 5.2, que la quantité de mouvement d'un système isole était toujours conservée au cours du temps. Si la vitesse du corps A change, la vitesse du corps B doit aussi changer de manière à garder la quantité de mouvement constante. Mais puisque la vitesse du corps B change, cela signifie qu'il est lui aussi soumis à une force : la force électrique exercée par le corps A sur le corps B.

$$\begin{aligned}
\vec{p} = m_A.\vec{v_A} + m_B.\vec{v_B} &= C^{te} \\
\frac{d}{dt}(m_A\vec{v_A} + m_B.\vec{v_B}) &= \frac{d}{dt}(C^{te}) = 0 \\
\frac{d}{dt}(m_A.\vec{v_A}) &= -\frac{d}{dt}(m_B.\vec{v_B}) \\
m_A.\vec{a_A} &= -m_B.\vec{a_B} \\
\vec{F}_{B\to A} &= -\vec{F}_{A\to B}
\end{aligned}$$

Cet exemple simple peut être généralisé à trois dimensions et à tous les types de force. Il traduit le principe de l'action et de la réaction, énoncé de la manière suivante :

> Lorsque deux particules sont en interaction, la force qui s'exerce sur une particule est égale et opposée à la force qui s'exerce sur l'autre

2. Son unité est le m ([L]). Par exemple, pour un sphère de rayon R, $\kappa = 6\pi R$

Remarque : Le principe d'action-réaction sous-entendrait-il que les forces se compensent constamment les unes avec les autres, empêchant par là-même toute forme de mouvement ? Rappelons que cette affirmation n'est vraie que pour un système isolé. Si le système étudié n'est pas un système isolé, alors il ne faut considérer que la (les) force(s) agissant sur le système en question seulement ! Pour résoudre correctement un problème de mécanique, la première étape consiste à bien choisir le système, puis à bien savoir distinguer les forces qui agissent sur ce dernier de celles qui agissent sur d'autres systèmes.

5.6 Formulation de la RFD dans un référentiel non-Galiléen

Supposons un référentiel galiléen $\Re$, et un référentiel relatif non-galiléen $\Re'$. Nous souhaitons étudier un problème mécanique dans le référentiel relatif $\Re'$. Or nous savons que la relation fondamentale de la dynamique (RFD) n'est valable que dans un référentiel galiléen $\Re$. De quelle manière est transformée la RFD lorsqu'elle doit être appliquée dans un référentiel non-galiléen ?

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F} &= m.\vec{a}_{(M/\Re)} \qquad \text{(dans } \Re) \\
\sum \vec{F} &= m.\left(\vec{a}_{(\Re'/\Re)} + \vec{a_c} + \vec{a}_{(M/\Re')}\right) \\
\sum \vec{F} &= m.\vec{a}_{(\Re'/\Re)} + m.\vec{a_c} + m.\vec{a}_{(M/\Re')} \\
\sum \vec{F} &= \vec{F_e} + \vec{F_c} + m.\vec{a}_{(M/\Re')} \\
\left(\sum \vec{F}\right) - \vec{F_e} - \vec{F_c} &= m.\vec{a}_{(M/\Re')}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\sum \vec{F}\right) - \vec{F_e} - \vec{F_c} = m.\vec{a}_{(M/\Re')}}$$

Nous avons deja vu que l'expression des forces ne dépend pas du référentiel, ainsi le terme $\left(\sum \vec{F}\right)$ n'est pas modifié dans la séquence d'équations ci-dessus. Le terme d'accélération $\vec{a}_{(M/\Re)}$ est simplement remplacé par celui de l'accélération relative $\vec{a}_{(M/\Re')}$. Cependant, l'expression de la RFD dans un référentiel non-galiléen fait intervenir des pseudo-forces $\vec{F_c}$ et $\vec{F_e}$, respectivement force de Coriolis et force d'entrainement, qu'il est nécessaire de rajouter (ou pour être plus précis, de soustraire aux forces appliquées sur le système)

Remarque : en pratique, pour calculer les pseudo-forces, il est nécessaire de connaitre l'accélération d'entrainement et de Coriolis du référentiel non-galiléen... cela suppose aussi de connaitre le mouvement de ce référentiel par rapport à un autre, galiléen quand à lui. On comprend alors pourquoi l'utilisation de la RFD dans un référentiel non-galiléen est relativement limitée : dans tous les cas, il est nécessaire d'avoir recours à un référentiel galiléen à un moment ou à un autre.

5.7 Théorème du moment cinétique

5.7.1 De la RFD au théorème du moment cinétique...

Reprenons l'expression de la relation fondamentale de la dynamique, et multiplions-la à droite et à gauche par $\vec{OM}\wedge$...

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F} &= m.\vec{a} \\
\vec{OM} \wedge \left(\sum \vec{F}\right) &= \vec{OM} \wedge (m.\vec{a}) \\
\sum \left(\vec{OM} \wedge \vec{F}\right) &= \vec{OM} \wedge \left(m.\frac{d}{dt}\vec{v}\right) \\
\sum \left(\vec{OM} \wedge \vec{F}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\vec{OM} \wedge (m.\vec{v})\right) - \frac{d}{dt}\vec{OM} \wedge m.\vec{v} \\
\sum \left(\vec{OM} \wedge \vec{F}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\vec{OM} \wedge (m.\vec{v})\right) - \underbrace{m.\vec{v} \wedge \vec{v}}_{=0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum \left(\vec{OM} \wedge \vec{F}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{OM} \wedge \vec{p}\right)}$$

ou $\vec{\tau} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$ est le **moment d'une force** par rapport au point O, et $\vec{L} = \vec{OM} \wedge \vec{p}$ est le **moment cinétique** du système en considération par rapport au point O. La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'une particule est égale au moment de la force qui lui est appliquée, quand les deux sont mesurés par rapport au même point.

5.7.2 Le cas des forces centrales

Une force dont la direction passe toujours par un point fixe est appelée "force centrale". Ainsi, en vertu du théorème du moment cinétique, lorsqu'une particule se déplace sous l'action d'une force centrale, son moment cinétique reste constant. La réciproque est également vraie. Ce résultat est important car beaucoup de forces dans la nature sont centrales, telles que la force de gravitation ou bien la force électrique. Le fait que le moment cinétique d'un point matériel soumis à l'action de forces centrales reste constant donne lieu à deux conséquences importantes :

Le mouvement est plan

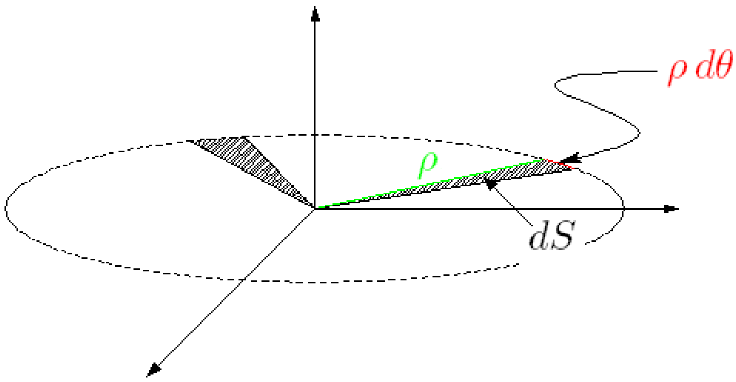
Puisque $\vec{L}$ est un vecteur fixe dans l'espace, sans cesse perpendiculaire à $\vec{OM}$, alors la trajectoire de M est contenue dans un plan fixe perpendiculaire à $\vec{L}$.

Le mouvement obéit à "la loi des aires"

Une force centrale peut s'exprimer de la manière suivante : $\vec{F} = \alpha_{(t)}.\frac{\vec{OM}}{||\vec{OM}||}$ où $\alpha_{(t)}$ est un scalaire. On suppose qu'il s'agit déjà de la somme vectorielle de toutes les forces centrales susceptibles d'être appliquées au système. Dans le repère polaire, on a, de manière générale : $\vec{OM} = \rho.\vec{e_\rho}$ et $\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}.\vec{e_\rho} + \rho.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta}$. Il vient :

$$
\begin{aligned}
\sum_i \vec{F_i} &= \frac{d}{dt}\vec{L} \\
\vec{OM} \wedge \vec{F} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{OM} \wedge m.\vec{v}\right) \\
\underbrace{\vec{OM} \wedge \alpha_{(t)}.\frac{\vec{OM}}{||\vec{OM}||}}_{=0 \ car \ \vec{OM}\wedge\vec{OM}=0} &= \frac{d}{dt}\left(\rho.\vec{e_\rho} \wedge m.\left[\frac{d\rho}{dt}.\vec{e_\rho} + \rho.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta}\right)\right] \\
0 &= \frac{d}{dt}\left[m\rho.\frac{d\rho}{dt}.\underbrace{(\vec{e_\rho} \wedge \vec{e_\rho})}_{=0} + m.\rho^2\frac{d\theta}{dt}(\vec{e_\rho} \wedge \vec{e_\theta})\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{C^{te}} &= m.\rho^2\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_z} \\
\frac{\vec{C^{te}}}{m} &= \rho.\rho.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_z} \\
\frac{\vec{C^{te}}}{m} &= 2\frac{dS}{dt}.\vec{e_z} \\
\text{Soit...} \ \frac{C^{te}}{2m} &= \frac{dS}{dt}
\end{aligned}
$$



La rayon vecteur $\vec{OM}$ balaye des aires égales égales pendant des intervalles de temps égaux. La constante C^{te} est appelée "la constante de la loi des aires".

5.8 Considérations générales sur la résolution d'un problème de mécanique

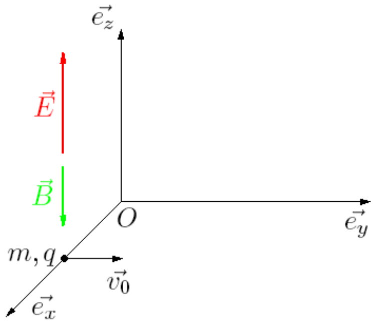
En général, la résolution d'un problème de mécanique est très méthodique. Les principales étapes de résolution sont présentées ci-dessous. Cependant, à ce stade du cours, vous devriez déjà posséder une intuition plus ou moins complète de la mécanique qui peut vous permettre de "passer" certaines étapes.

EXEMPLE

On cherche à établir les équations horaires s'une particule de masse m, de charge q soumis dans un champ électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ uniformes dirigés selon $\vec{e_z}$ et $-\vec{e_z}$ respectivement. A l'instant initial, la particule se trouve sur l'axe [Ox), à une distance x_0 de O. La vitesse initiale $\vec{v_0}$ est parallèle à l'axe [Oy) (voir schéma ci-dessous). De plus, on considère que $v_0 = \frac{qB}{m}.x_0$

5.8.1 Choix du systeme

Même si cette étape semble superflue (ou bien tellement évidente qu'il n'est peut-être pas nécessaire de la mentionner) *ne la négligez pas !*. Le choix du système est très important afin d'établir par la suite le "bilan des forces". En effet, seules les forces appliquées sur le système choisi devront être prises en considération. Les forces internes au système, ou bien s'appliquant à des objets extérieurs au système, devront être ignorées. Si votre système est mal défini, vous aurez du mal à faire le tri parmi les nombreuses forces mises en jeu dans un problème de mécanique (ex : dois-je considérer la force d'action, ou de réaction ?)



Ici, le système est "la particule". Ce cas est relativement simple puisque la particule n'est pas en interaction avec d'autres corps...

5.8.2 Choix du référentiel

Lorsque celui-ci ne vous est pas imposé, choisissez votre référentiel avec soin. Les équations du mouvement peuvent être soit très simples, soit très compliquées en fonction du référentiel choisi. Par exemple, le mouvement des planètes du système solaire est relativement simple lorsque vu depuis le soleil (dans le référentiel de Copernic)... mais elles deviennent très vite compliquées lorsque le référentiel choisi est lié à la terre.

En anticipant la trajectoire de votre système, cette dernière peut-elle s'exprimer comme une combinaison de plusieurs mouvements simples ? Si oui, optez pour une résolution grâce à un changement de référentiel. Vous gagnerez en clarté et traiterez chacun des mouvements individuellement ! (Ex : le mouvement cycloïdal ou hélicoïdal peut être vu comme un mouvement de rotation combiné à un mouvement de translation...)

Nous cherchons à établir l'équation horaire du mouvement dans le référentiel du laboratoire. Étant donné que nous analysons l'effet de la force de Lorentz pour la première fois, nous n'avons *a priori* aucune indication sur la nature du mouvement... il est donc difficile d'anticiper la trajectoire de la particule dès à présent, et donc de choisir un autre référentiel (relatif) dans lequel le mouvement serait plus simple à analyser.

5.8.3 Choix du repère

Lorsque celui-ci ne vous est pas imposé, choisissez votre repère d'espace avec le plus grand soin. Là encore, les équations du mouvement peuvent être soit très simples, soit très complexes en fonction du repère choisi. Aidez-vous de la dimension et des symétries du problème pour choisir votre repère d'espace. Inutile de choisir le repère sphérique lorsque l'on doit décrire un mouvement rectiligne ! De la même manière, privilégiez le repère sphérique lorsque le système est soumis à l'action d'une force centrale...

De la même manière que précédemment, nous ne sommes pas en mesure d'anticiper le mouvement... Nous choisissons d'utiliser le repère cartésien, en espérant que nous avons fait le bon choix !

(Dans un deuxième temps, nous verrons que le repère cylindrique est beaucoup plus adapté à la résolution du problème !)

5.8.4 Bilan des forces

Dressez la liste de toutes les forces susceptibles d'agir sur le système. Trouvez leur expression mathématique grâce aux paramètres du problème, et exprimez-les selon les vecteurs de base du repère choisi.

Ici, la seule force qui s'applique sur le système est la force de Lorentz. Son expression mathématique est :

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= q\left(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}\right)\\
\vec{F} &= q\left[E.\vec{e_z}+(v_x.\vec{e_x}+v_y.\vec{e_y})\wedge -B.\vec{e_z}\right]\\
\vec{F} &= q.E.\vec{e_z}+q.v_x.B\,(\vec{e_x}\wedge\vec{e_z})-q.v_y.B\,(\vec{e_y}\wedge\vec{e_z})\\
\vec{F} &= q.E.\vec{e_z}+q.v_x.B.\vec{e_y}-q.v_y.B.\vec{e_x}
\end{aligned}
$$

5.8.5 Cinématique

Établissez l'expression du vecteur accélération de votre système selon les vecteurs de base du repère choisi. Deux manières de procéder sont possibles :

- Établissez d'abord l'expression du vecteur position $\vec{OM}$ et dérivez-le pour obtenir la vitesse $\vec{v}$. Puis dérivez le vecteur vitesse pour obtenir le vecteur accélération $\vec{a}$.

- Reprenez les "formules" générales de l'accélération démontrées dans le cours, et supprimez les éléments nuls en analysant les symétries, la dimension ainsi que les autres données du problème (par exemple si $\omega=\dot{\theta}=C^{te}$, alors $\ddot{\theta}=0$).

Si vous avez opté pour un changement de référentiel, n'oubliez pas de calculer les accélérations de Coriolis et d'entrainement !

Dans le repere cartesien, on a :

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{e_x}+\frac{d^2y}{dt^2}.\vec{e_y}+\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z}$$

En l'état actuel de nos connaissances, il est impossible de faire des hypothèses sur la dimension et sur les symétries du mouvement afin d'éliminer des termes dans l'expression générale de l'accélération. Nous choisissons donc de garder tous les termes !

En général, garder systématiquement tous les termes de l'accélération n'est pas faux, mais peut alourdir les équations et risque de déboucher sur des évidences (équations de type "0=0"). Par contre, supprimer par erreur un des termes de l'accélération qui n'est pas nul conduit à des erreurs graves !

5.8.6 Dynamique

A ce stade de la résolution du problème, vous possédez l'expression mathématique des forces appliquées au système et l'expression mathématique de son vecteur accélération. Il ne vous reste plus qu'à appliquer la relation fondamentale de la dynamique (ou le théorème du moment cinétique, le cas échéant). Vous obtenez une relation vectorielle, qu'il ne reste plus qu'à projeter sur les vecteurs de base du repère d'espace.

$$
\begin{aligned}
\sum\vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt}=m.\vec{a}\\
q.E.\vec{e_z}+q.v_x.B.\vec{e_y}-q.v_y.B.\vec{e_x} &= m.\left(\frac{d^2x}{dt^2}.\vec{e_x}+\frac{d^2y}{dt^2}.\vec{e_y}+\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z}\right)
\end{aligned}
$$

Projection sur les axes...

$$
\begin{cases}
-q.v_y.B=m.\frac{d^2x}{dt^2} & \text{(RFD selon } \vec{e_x})\\
q.v_x.B=m.\frac{d^2y}{dt^2} & \text{(RFD selon } \vec{e_y})\\
q.E=m.\frac{d^2z}{dt^2} & \text{(RFD selon } \vec{e_z})
\end{cases}
$$

5.8.7 Résolution mathématique du problème

Après la projection de la RFD sur les vecteurs de base du repère, vous obtenez en général un **système d'équations différentielles non-linéaires couplées**, le plus souvent du **second ordre**, que vous devez résoudre.

- **Système** : signifie que vous avez trois équations (si votre problème est 3D), ou deux équations (si le problème est 2D) ou bien une seule (problème 1D) que vous devez résoudre simultanément. Il est conseillé d'utiliser la méthode de Gauss (ou méthode du pivot) pour la résolution des systèmes.

La troisième équation peut être traitée indépendamment des deux premières : en effet, la coordonnée z n'apparaît que dans la troisième équation, et n'est pas couplée avec les coordonnées x ou y ou leurs dérivées. Il vient donc :

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{qE}{m} \quad \text{soit} \quad \frac{dz}{dt}=\frac{qE}{m}.t+C_1\\
z(t) &= \frac{qE}{2m}.t^2+C_1.t+C_2
\end{aligned}
$$

Or, a $t=0$, $z(t=0)=0$ et $v_z(t=0)=0$ donc $C_1=0$ et $C_2=0$

$$\boxed{z_{(t)} = \frac{qE}{2m}.t^2}$$

- **équation différentielle** : signifie une relation entre une fonction et ses différentes dérivées. Si vous avez opté pour un repère cartésien en trois dimensions par exemple, vous devrez trouver trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ obéissant simultanément à trois équations dans lesquelles apparaitront, en général : $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, $\ddot{z}(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$, $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

- **couplées** : signifie que les coordonnées du système ainsi que leurs dérivées (par exemple $\ddot{r}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\phi}$, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, r, θ et ϕ dans le repère sphérique) sont susceptibles d'apparaitre dans chacune des équations du système. Le choix d'un bon repère d'espace, tenant compte des symétries du problème, permet quelques fois de découpler les équations du système, qui peuvent alors être traitées individuellement !

- **second ordre** : l'ordre d'une équation différentielle correspond à l'ordre de dérivation le plus élevé de la fonction qui intervient dans cette relation. En mécanique classique, le système d'équations différentielles couplées, permettant de trouver les équations horaires du mouvement, est obtenu à partir de la relation fondamentale de la dynamique qui fait intervenir l'accélération du système... c'est à dire la dérivée seconde des coordonnées. Il n'est donc pas étonnant que les équations différentielles d'un problème de mécanique soient nécessairement du second ordre.

- **non-linéaire** : signifie que des termes non-linéaires (ex : $\sin\theta$, ρ^2) sont présents dans les équations. Ces termes sont relativement "ennuyeux" car il devient très difficile de trouver une solution analytique au problème. Deux alternatives sont possibles : soit nous utilisons un ordinateur pour résoudre ces équations (méthodes numériques), soit nous "linéarisons" les équations (en effectuant un développement limité des termes non-linaires) afin de trouver une solution certes approchée, mais analytique...

Les deux premières équations du système doivent être traitées "ensemble" : elles sont couplées.

$$\begin{array}{c} (1) \\ \\ (2) \end{array} \begin{cases} -q.v_y.B = m.\frac{d^2x}{dt^2} \\ \\ q.v_x.B = m.\frac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} (1) \\ \\ (2) \end{array} \begin{cases} -q.v_y.B = m.\frac{dv_x}{dt} \\ \\ q.v_x.B = m.\frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} (1) \\ \\ (2) \end{array} \begin{cases} v_y = -\frac{m}{q.B}.\frac{dv_x}{dt} \\ \\ q.v_x.B = m.\frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} (1) \\ \\ (2) \end{array} \begin{cases} \frac{dv_y}{dt} = -\frac{m}{q.B}.\frac{d^2v_x}{dt^2} \\ \\ q.v_x.B = m.\frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} (1) \\ \\ (2) = (1)\ dans\ (2) \end{array} \begin{cases} \frac{dv_y}{dt} = -\frac{m}{q.B}.\frac{d^2v_x}{dt^2} \\ \\ q.v_x.B = -\frac{m^2}{q.B}.\frac{d^2v_x}{dt^2} \end{cases}$$

La résolution "symétrique" du système (c'est à dire que l'on élimine v_x au profit de v_y) conduit à une équation similaire : $q.v_y.B = -\frac{m^2}{q.B}.\frac{d^2v_y}{dt^2}$

$$\begin{array}{c} (1) \\ \\ (2) \end{array} \begin{cases} \frac{d^2v_y}{dt^2} + \left(\frac{q.B}{m}\right)^2.v_y = 0 \\ \\ \frac{d^2v_x}{dt^2} + \left(\frac{q.B}{m}\right)^2.v_x = 0 \end{cases}$$

A présent, les deux équations peuvent être résolues[a] indépendamment l'une de l'autre, on pose $\omega = \frac{qB}{m}$:
$v_x(t) = Ae^{i.\omega.t} + Be^{-i.\omega.t}$
$v_y(t) = A'e^{i.\omega.t} + B'e^{-i.\omega.t}$
où A, B, A' etB' sont des constantes.

Après dérivation, il vient :
$a_x(t) = A.i.\omega.e^{i.\omega.t} - B.i.\omega.e^{-i.\omega.t}$
$a_y(t) = A'.i.\omega.e^{i.\omega.t} - B'.i.\omega.e^{-i.\omega.t}$

[a] la technique générale de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre et du premier ordre est donnée en annexe

Afin de trouver les constantes A, B, A' et B', nous avons besoin des conditions initiales concernant la vitesse et l'accélération de la particule. En ce qui concerne la vitesse initiale, nous savons d'après les données de l'énoncé que $v_{x(t=0)} = 0$ et $v_{y(t=0)} = v_0$. Nous connaissons aussi l'expression de la force appliquée sur la particule à $t = 0$: $\vec{F}_{(t=0)} = q.\vec{v_0} \wedge \vec{B} = q.v_0.B.(\vec{e}_y \wedge -\vec{e}_z) = -q.v_0.B.\vec{e_x}$ soit $F_{x(t=0)} = -q.v_0.B$ et $F_{y(t=0)} = 0$. En utilisant la RFD, il est aisé de retrouver les conditions initiales sur l'accélération : $a_{x(t=0)} = -\frac{q.v_0.B}{m}$ et $a_{y(t=0)} = 0$

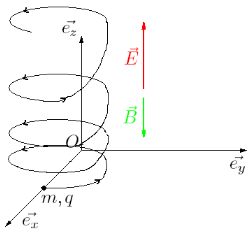
Il vient :

$$\begin{array}{rcl} v_{x(t=0)} = 0 & \rightarrow & A + B = 0 \\ v_{y(t=0)} = v_0 & \rightarrow & A' + B' = v_0 \\ a_{x(t=0)} = -\dfrac{q.v_0.B}{m} & \rightarrow & A - B = \dfrac{-q.v_0.B}{i.m.\omega} \\ a_{y(t=0)} = 0 & \rightarrow & A' - B' = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} A = -v_0/2.i \\ B = v_0/2.i \\ A' = v_0/2 \\ B' = v_0/2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} v_x = -v_0.\sin(\omega.t) \\ v_y = v_0.\cos(\omega.t) \\ a_x = -v_0.\omega.\cos(\omega.t) \\ a_y = -v_0.\omega.\sin(\omega.t) \end{array}$$

Par intégration, il vient $x(t) = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega.t) + C$ et $y(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega.t) + C'$.

Or à $t = 0$, $x_{(t=0)} = x_0$ et $y_{(t=0)} = 0$ soit : $C = x_0 - v_0/\omega$ et $C' = 0$.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{m.v_0}{q.B}\left(\cos(\frac{q.B}{m}.t)-1\right)+x_0\\
y(t) &= \frac{m.v_0}{q.B}\sin(\frac{q.B}{m}.t)\\
z_{(t)} &= \frac{qE}{2m}.t^2
\end{aligned}
$$



Dans le plan {Oxy}, le mouvement est circulaire uniforme, de vitesse angulaire $\omega = \frac{qB}{m}$, de rayon $R = \frac{m.v_0}{q.B}$ et de centre $X = x_0 - \frac{m.v_0}{q.B}$, $Y = 0$. Selon l'axe [Oz], il est uniformément accéléré !

5.8.8 Résolution du problème en utilisant les symétries et les outils de la mécanique

Attardons-nous quelques instants sur l'expression de la force de Lorentz : $\vec{F} = q\left(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}\right)$. La force induite par la présence du champ magnétique $\vec{F_\ell} = \vec{v}\wedge\vec{B}$ est toujours perpendiculaire à la vitesse de la particule (propriété du produit vectoriel). Comme le vecteur vitesse est lui même toujours dirigé selon le vecteur "déplacement élémentaire" $\vec{d\ell}$, cela revient à dire que $\vec{F_\ell}$ est toujours perpendiculaire à la trajectoire. De ce fait, la force "magnétique" (ou force de Laplace) ne travaille pas (voir chapitre 6). Cette dernière n'est donc pas susceptible d'accélérer ou de ralentir la particule, elle ne peut que lui faire changer de direction tout en laissant le module de sa vitesse constante. Il en résulte que le module de la force de Lorentz est constant ($||\vec{B}|| = C^{te}$ et $||\vec{v}|| = v_0$, donc $||\vec{F_\ell}|| = q.v_0.B = C^{te}$). Le mouvement de la particule du à la composante "magnétique" uniquement de la force de Lorentz ne peut être que circulaire uniforme, car il est le seul à garantir les conditions $||\vec{F}|| = C^{te}$, $||\vec{v}|| = C^{te}$ et $\vec{F}\perp\vec{v}$. Dès lors, il semble logique d'utiliser le repère cylindrique, qui sera beaucoup plus adapté à aux symétries du mouvement !

Nous savons que, pour un mouvement circulaire, le moment de la force $\tau\vec{F} = \vec{OM}\wedge\vec{F_\ell}$ est nul. Par conséquent, le mouvement cinétique $\vec{L}$ de la particule est un vecteur constant (car $\vec{L} = \frac{d}{dt}\vec{\tau}$). Pour connaître son expression, il suffit de le calculer à $t=0$, soit $\vec{L} = m.x_0.\vec{e_\rho}\wedge v_0\vec{e_y} = m.x_0.v_0.\vec{e_z}$. Si le vecteur moment cinétique est constant et qu'il est dirigé selon l'axe $\vec{e_z}$, cela signifie que le mouvement de la particule (dû à F_ℓ uniquement !) est contenu dans le plan [Oxy). La force de Coulomb, c'est à dire la composante électrique de la force de Lorentz, est quand à elle dirigée selon $\vec{e_z}$. Les deux forces ne se "mélangent" pas et peuvent donc être traitées séparément. Nous connaissons déjà beaucoup de choses sur le mouvement de la particule, mais il nous reste à découvrir encore quelques grandeurs :

- Le mouvement de la particule induit par la force de Coulomb selon l'axe [Oz)
- La vitesse angulaire du mouvement circulaire uniforme dans le plan [Oxy)
- Le rayon de courbure R

On a :

$$
\begin{aligned}
\vec{OM} &= \rho.\vec{e_\rho}+z.\vec{e_z}\ avec\ \rho = R = C^{te}\\
\vec{v} &= R.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta}+\frac{dz}{dt}\vec{e_z}\ avec\ \frac{d\theta}{dt} = \omega = C^{te}\\
\vec{a} &= -R.\omega^2.\vec{e_\rho}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{e_z}\\
\vec{F} &= q.\left(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}\right) = qE.\vec{e_z}+q.B.R.\omega.(\vec{e_\theta}\wedge-\vec{e}_z) = qE.\vec{e_z}-q.B.R.\omega.\vec{e_\rho}
\end{aligned}
$$

En appliquant la RFD puis en la projetant sur les axes du repère choisi, il vient :

$$
\begin{aligned}
\sum\vec{F} &= m.\vec{a}\\
qE.\vec{e_z}-q.B.R.\omega.\vec{e_\rho} &= -m.R.\omega^2.\vec{e_\rho}+m.\frac{d^2z}{dt^2}\vec{e_z}
\end{aligned}
$$

(1)Projection sur $\vec{e_z}$: $qE = m.\frac{d^2z}{dt^2}$

(2)Projection sur $\vec{e_\rho}$: $-q.B.R.\omega = -m.R.\omega^2$

Cette fois-ci, les équations différentielles du système sont **découplées** et leur résolution est immédiate :

L'équation (1) conduit à : $z_{(t)} = \frac{qE}{m}t^2+C_1.t+C_2$

L'équation (2) conduit à : $\omega = \frac{qB}{m}$ (R est obtenu à partir des conditions initiales :$v_0 = R.\omega\ soit\ R = \frac{m.v_0}{q.B}$)

Nous retrouvons bien les mêmes résultats que nous avions obtenu en traitant le problème dans le repère cartésien, cependant les calculs sont beaucoup moins complexes en exploitant dès le début les données du problème et en choisissant le "bon" repère.