Chapitre 7

annexes

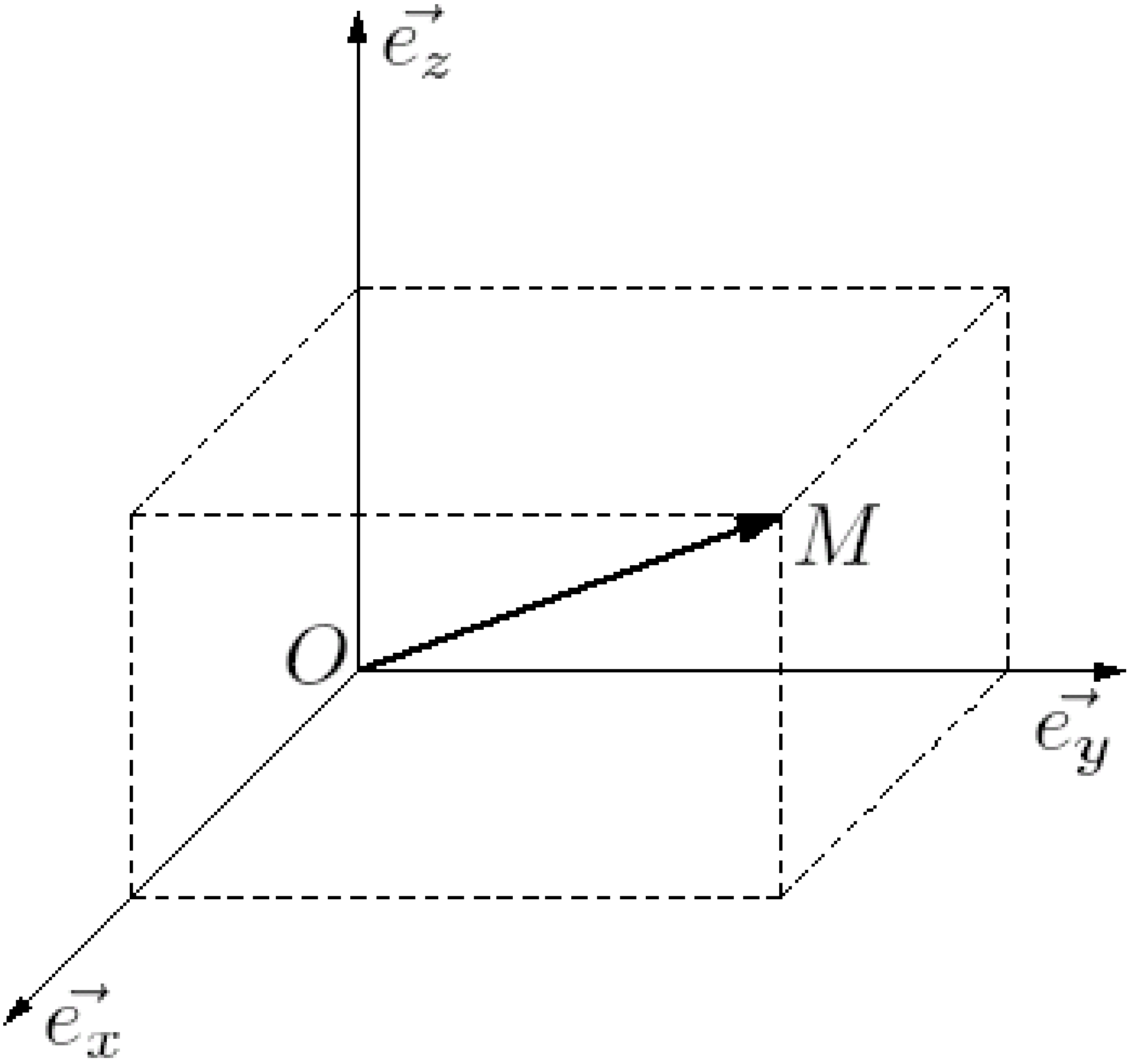
7.1 Cinématique et repères

Repere cartesien

Repere cylindrique

Repere spherique

Voir au dos



Expression du vecteur position

$$\vec{OM} = x.\vec{e_x} + y.\vec{e_y} + z.\vec{e_z}$$

Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

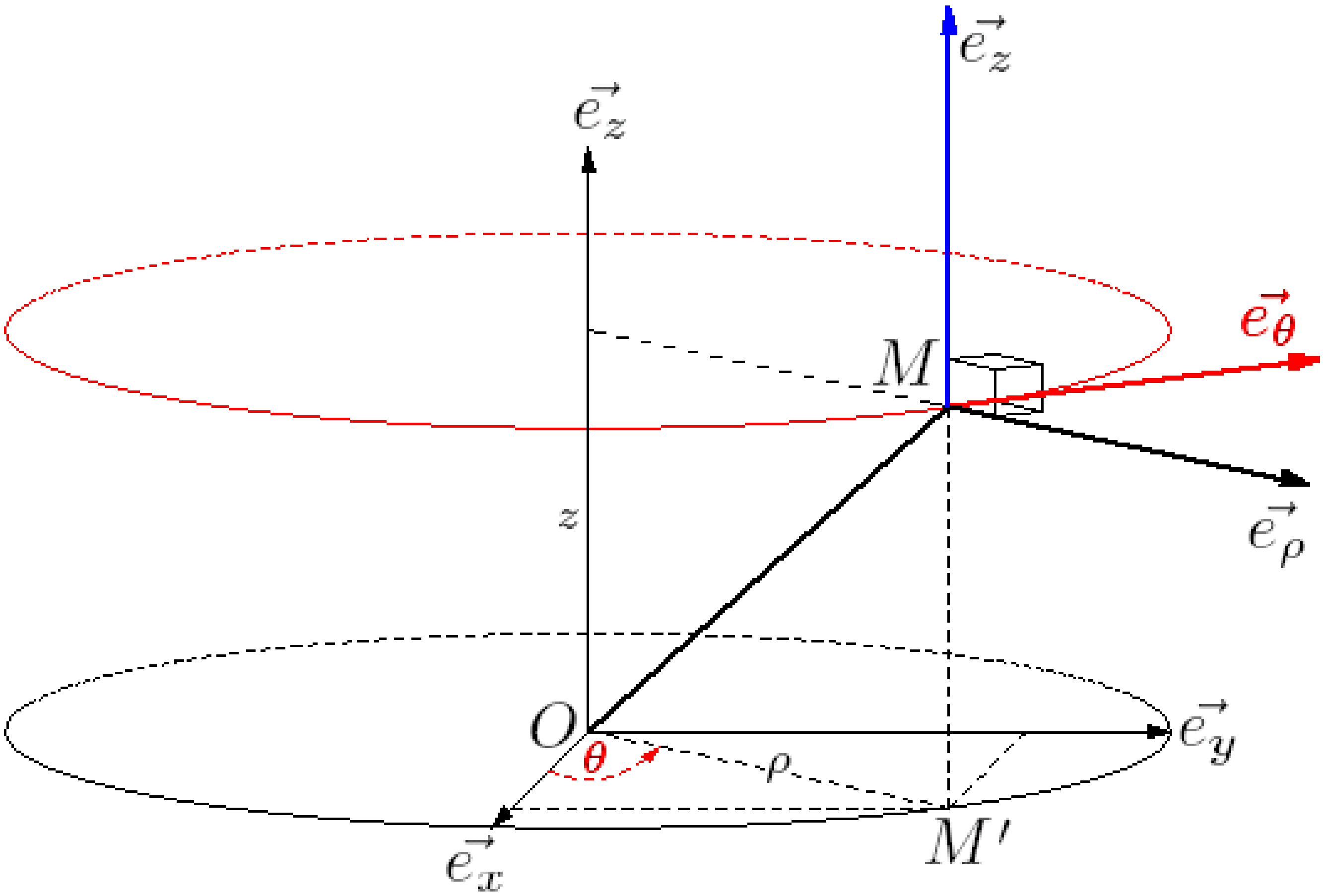
$$\vec{d\ell} = dx.\vec{e_x} + dy.\vec{e_y} + dz.\vec{e_z}$$

Expression du vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}.\vec{e_x} + \frac{dy}{dt}.\vec{e_y} + \frac{dz}{dt}.\vec{e_z}$$

Expression du vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{e_y} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z}$$



Expression du vecteur position

$$\vec{OM} = \rho.\vec{e_\rho} + z.\vec{e_z}$$

Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

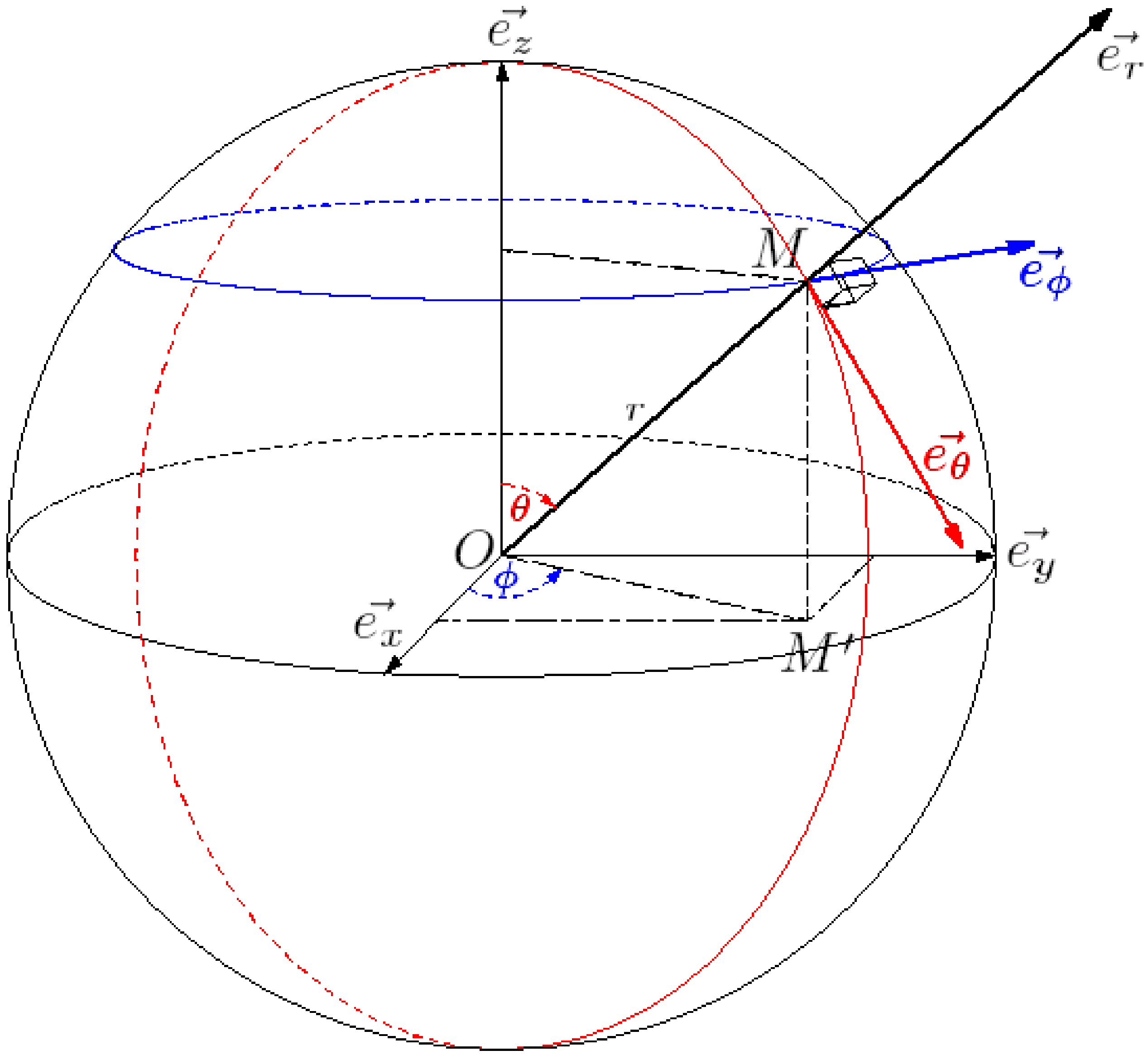
$$\vec{d\ell} = d\rho.\vec{e_\rho} + \rho.d\theta.\vec{e_\theta} + dz.\vec{e_z}$$

Expression du vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}.\vec{e_\rho} + \rho.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + \frac{dz}{dt}.\vec{e_z}$$

Expression du vecteur accélération

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right).\vec{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right).\vec{e_\theta} + \ddot{z}.\vec{e_z}$$



Expression du vecteur position

$$\vec{OM} = r.\vec{e_r}$$

Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

$$\vec{d\ell} = dr.\vec{e_r} + r.d\theta.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.d\phi.\vec{e_\phi}$$

Expression du vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}.\vec{e_r} + r.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.\frac{d\phi}{dt}.\vec{e_\phi}$$

Expression du vecteur accélération

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right).\vec{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right).\vec{e_\theta} + \left(2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta\right).\vec{e_\phi}$$

7.2 Méthode de résolution des équation différentielles linéaires

Les équations différentielles linéaires sont très souvent rencontrées en mécanique classique. Leur traitement mathématique ne comporte pas de difficultés majeures, encore faut-il avoir compris en profondeur les techniques de résolution pour pouvoir les intégrer correctement. Le équations différentielles linéaires ont déjà été traitées dans votre cours de mathématique au premier semestre, elles sont cependant re-discutée dans cette annexe, de manière moins formelle et plus appliqué à la mécanique du point.

Soit $x_{(t)}$ une coordonnée du mouvement dont nous aimerions connaitre l'évolution au cours du temps. Après avoir appliqué la relation fondamentale de la dynamique, nous obtenons une équation différentielle linéaire du premier ordre ou du second ordre :

<u>1^{er} ordre</u>

$$\alpha.\frac{dx_{(t)}}{dt} + \beta.x_{(t)} = \epsilon_{(t)}$$

<u>2^{nd} ordre</u>

$$\alpha.\frac{d^2x_{(t)}}{dt^2} + \beta.\frac{dx_{(t)}}{dt} + \gamma.x_{(t)} = \epsilon_{(t)}$$

La solution générale de ces équations est donnée par la solution de l'équation "sans second membre" (ESSM - c'est à dire les mêmes équations que ci-dessus, mais avec $\epsilon = 0$) <u>**plus**</u> une solution particulière de l'équation "avec second membre" (EASM)

7.2.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Resolution de l'ESSM

$$\alpha.\frac{dx_{(t)}}{dt} + \beta.x_{(t)} = 0$$

$$\frac{dx_{(t)}}{dt} = -\frac{\beta}{\alpha}.x_{(t)}$$

$$\frac{dx_{(t)}}{x_{(t)}} = -\frac{\beta}{\alpha}.dt$$

$$\int \frac{dx_{(t)}}{x_{(t)}} = -\int \frac{\beta}{\alpha}.dt$$

$$\ln\left(x_{(t)}\right) + C^{te} = -\frac{\beta}{\alpha}.t + C^{te}$$

$$x_{(t)} = e^{-\frac{\beta}{\alpha}.t+C^{te}} = A.e^{-\frac{\beta}{\alpha}.t}$$

$$\boxed{x_{(t)} = A.e^{-\frac{\beta}{\alpha}.t} \text{ avec A une constante}}$$

Résolution de l'EASM

Il s'agit ici de trouver une solution particulière de l'EASM. Si le terme $\epsilon_{(t)}$ se présente sous la forme $\epsilon_{(t)} = \sum_n C_n^{te}.t^n$, il est très aisé de déterminer une solution particulière de l'EASM, comme le montre les exemples suivants :

Par exemple, si $\epsilon_{(t)} = C$ est une constante, on remarque que l'équation $x_{(t)} = \frac{C}{\beta}$ est une solution particulière possible de l'EASM.

Si $\epsilon_{(t)} = C_1.t + C_2$, alors l'équation $x_{(t)} = \frac{C_1}{\beta}.t + \frac{C_2-(\alpha.C_1)/(\beta)}{\beta}$ est une solution particulière possible de l'EASM.

Si $\epsilon_{(t)}$ est une fonction autre que polynomiale, alors il faut rechercher une solution particulière de manière empirique. Par exemple si $\epsilon_{(t)} = \ln(k.t)$ ou $\epsilon_{(t)} = \cos(k.t)$, il est très difficile de trouver une solution particulière analytique et simple de l'EASM

Ainsi, si l'expression de l'équation à résoudre est $\alpha.\frac{dx_{(t)}}{dt} + \beta.x_{(t)} = C_1.t + C_2$, la solution sera de la forme :

$$\boxed{x_{(t)} = A.e^{-\frac{\beta}{\alpha}.t} + \frac{C_1}{\beta}.t + \frac{C_2-(\alpha.C_1)/(\beta)}{\beta}}$$

La constante A est encore inconnue. Elle sera déterminée par les conditions initiales du problème. Rappelons que cette constante est issue de l'intégration de l'ESSM. Puisque cette dernière est du premier ordre, une seule intégration est nécessaire et de ce fait, une seule constante devra être déterminée avec une seul condition initiale.

7.2.2 Équation différentielle linéaire du second ordre

La méthode de résolution des équations différentielles du second ordre est très similaire à celle utilisée pour les équations différentielles du premier ordre. Il s'agit dans un premier temps de rechercher toutes les solutions possibles de l'ESSM, puis de rechercher une solution particulière de l'EASM. Enfin la solution finale est donnée par la somme de l'ESSM et de l'EASM. Seules la technique de résolution de l'ESSM et la détermination de deux constantes d'intégration grâce aux conditions initiales sont différentes du cas traite précédemment.

Résolution de l'ESSM

L'ESSM s'écrit $\alpha.\frac{d^2x_{(t)}}{dt^2} + \beta.\frac{dx_{(t)}}{dt} + \gamma.x_{(t)} = 0$. Pour la résoudre, nous cherchons des solutions du type : $x_{(t)} = A.e^{\omega.t}$, que nous remplaçons dans l'ESSM. Il vient :

$$\begin{aligned}
&\alpha.\frac{d^2}{dt^2}\left(A.e^{\omega.t}\right) + \beta.\frac{d}{dt}\left(A.e^{\omega.t}\right) + \gamma.A.e^{\omega.t} = 0 \\
&\alpha.\omega^2.A.e^{\omega.t} + \beta.\omega.A.e^{\omega.t} + \gamma.A.e^{\omega.t} = 0 \\
&A.e^{\omega.t} \times \left(\alpha.\omega^2. + \beta.\omega. + \gamma\right) = 0 \\
&\alpha.\omega^2. + \beta.\omega. + \gamma = 0
\end{aligned}$$

Cette derniere relation ($\alpha.\omega^2.+\beta.\omega.+\gamma = 0$) est aussi appelée le "polynôme caractéristique" de l'équation différentielle. Nous cherchons le(s) solution(s) ω qui satisfont cette équation. Selon le signe de $\Delta = \beta^2 - 4.\alpha.\gamma$, deux cas sont possibles :

Cas 1 : $\Delta \geq 0$

$\Delta = \beta^2 - 4.\alpha.\gamma \geq 0$

soit $\omega^a_{(t)} = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2.\alpha}$ et $\omega^b_{(t)} = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2.\alpha}$

La solution globale de l'ESSM est une combinaison linéaire des deux solutions possibles $x^a_{(t)} = C_1 e^{\omega^a.t}$ et $x^b_{(t)} = C_2 e^{\omega^b.t}$:

$$\begin{aligned}
x_{(t)} &= C_1.e^{\omega^a.t} + C_2.e^{\omega^b.t} \\
x_{(t)} &= e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \left(C_1.e^{\frac{+\sqrt{\Delta}.t}{2\alpha}} + C_2.e^{\frac{-\sqrt{\Delta}.t}{2\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

Cas 2 : $\Delta < 0$

$\Delta = \beta^2 - 4.\alpha.\gamma < 0$

soit $\omega^a_{(t)} = \dfrac{-\beta + i.\sqrt{-\Delta}}{2.\alpha}$ et $\omega^b_{(t)} = \dfrac{-\beta - i.\sqrt{-\Delta}}{2.\alpha}$

La solution globale de l'ESSM est une combinaison linéaire des deux solutions possibles $x^a_{(t)} = C_1 e^{\omega^a.t}$ et $x^b_{(t)} = C_2 e^{\omega^b.t}$:

$$\begin{aligned}
x_{(t)} &= C_1.e^{\omega^a.t} + C_2.e^{\omega^b.t} \\
x_{(t)} &= e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \left(C_1.e^{\frac{i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}} + C_2.e^{\frac{-i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

Dans le cas 2, nous avons eu recours à l'utilisation de nombres imaginaires. Pas d'inquiétude... ces derniers disparaitront lors de la détermination de la solution finale, avec l'utilisation des conditions initiales.

Resolution de l'EASM

La solution particulière de l'EASM recherchée obéit aux mêmes principes que précédemment : si le terme $\epsilon_{(t)}$ se présente sous la forme $\epsilon_{(t)} = \sum_n C^{te}_n.t^n$, alors il est judicieux de chercher une solution particulière de l'EASM ayant la même forme (sauf si $\gamma = 0$, auquel cas il suffit de chercher un polynôme d'ordre $n-1$). Si $\epsilon_{(t)}$ est une fonction "quelconque", alors il faut rechercher une solution particulière de l'EASM de manière empirique. Par exemple, dans le cas particulier ou $\beta = 0$ et $\epsilon_{(t)} = C.\cos(k.t)$, on remarque que $x^p_{(t)} = \frac{C}{\gamma - \alpha.k^2}\cos(k.t)$ est une solution particulière.

Exemple d'utilisation des conditions initiales - cas ou $\Delta < 0$

Nous cherchons la solution de l'équation différentielle $\alpha.\frac{d^2x_{(t)}}{dt^2} + \beta.\frac{dx_{(t)}}{dt} + \gamma.x_{(t)} = 0$. Par ailleurs, nous avons $\Delta = \beta^2 - 4.\alpha.\gamma < 0$. La solution de cette équation différentielle est : $x_{(t)} = e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \left(C_1.e^{\frac{i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}} + C_2.e^{\frac{-i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}}\right)$. Nous recherchons les constantes C_1 et C_2 grâce aux conditions initiales du problème données ci-dessous :

- a $t = 0$, $x = 0$ soit $C_1 + C_2 = 0$
- a $t = 0$, $v = \dot{x} = v_0$ soit $C_1.\left(\frac{-\beta}{2\alpha} + i.\frac{\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}\right) - C_2\left(\frac{-\beta}{2\alpha} - i.\frac{\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}\right) = v_0$

Soit $C_1 = -C_2$ avec $C_1 = \frac{\alpha.v_0}{i.\sqrt{-\Delta}}$. Il vient :

$$x_{(t)} = e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \left(\frac{\alpha.v_0}{i.\sqrt{-\Delta}}.e^{\frac{i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}} - \frac{\alpha.v_0}{i.\sqrt{-\Delta}}.e^{\frac{-i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}}\right) = \frac{2\alpha.v_0}{\sqrt{-\Delta}}.e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \left(\frac{e^{\frac{i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}} - e^{\frac{-i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}}}{2i}\right) = \frac{2\alpha.v_0}{\sqrt{-\Delta}}.e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \sin\left(\sqrt{-\Delta}.t/2\alpha\right)$$

$$\boxed{x_{(t)} = \frac{2\alpha.v_0}{\sqrt{-\Delta}}.e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \sin\left(\sqrt{-\Delta}.t/2\alpha\right)}$$

Il s'agit d'une sinusoïde amortie !

7.3 Les chocs élastiques : traitement mathématique

Retrouvez les séances de travaux pratiques sur internet :

http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/menumeca.html

7.3.1 Chocs à 1 dimension

(1) Conservation de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}m_1.v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2'^2$

(2) Conservation de la quantité de mouvement : $m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_2'}$

Après projection de la relation (2) sur l'axe [Ox), il s'agit de résoudre le système suivant : (on pose $\mu = m_1/m_2$)

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}\frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}m_1.v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2'^2\\ m_1.v_1 + m_2.v_2 = m_1.v_1' + m_2.v_2'\end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}m_1.\left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2.\left(v_2'^2 - v_2^2\right)\\ m_1.\left(v_1 - v_1'\right) = m_2.\left(v_2' - v_2\right)\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}\mu.\left(v_1 - v_1'\right).\left(v_1 + v_1'\right) = \left(v_2' - v_2\right).\left(v_2' + v_2\right)\\ \mu.\left(v_1 - v_1'\right) = \left(v_2' - v_2\right)\end{cases} \quad \begin{matrix}(1) = (2) \text{ dans } (1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}\mu.\left(v_1 - v_1'\right).\left(v_1 + v_1'\right) = \mu\left(v_1' - v_1\right).\left(v_2' + v_2\right)\\ \mu.\left(v_1 - v_1'\right) = \left(v_2' - v_2\right)\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}\left(v_1 + v_1'\right) = \left(v_2' + v_2\right)\\ \mu.\left(v_1 - v_1'\right) = \left(v_2' - v_2\right)\end{cases} \quad \begin{matrix}(1) = (2) \text{ dans } (1)\\(2) = (1) \text{ dans } (2)\end{matrix}\begin{cases}v_1' = v_2 - v_1 + \mu\left(v_1 - v_1'\right) + v_2\\ v_2' = v_2 + \mu\left[v_1 - \left(v_2' + v_2 - v_1\right)\right]\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}v_1' + \mu.v_1' = 2v_2 + v_1\left(\mu - 1\right)\\ v_2' + \mu.v_2' = v_2\left(1 - \mu\right) + 2\mu.v_1\end{cases} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}v_1' = \frac{2v_2 + (\mu-1).v_1}{\mu+1}\\ v_2' = \frac{2\mu v_1 + (1-\mu).v_2}{\mu+1}\end{cases}$$

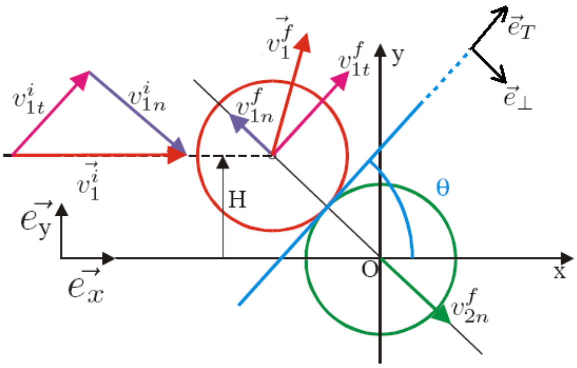
$$\boxed{v_1' = \frac{2v_2 + (\mu - 1).v_1}{\mu + 1} \qquad v_2' = \frac{2\mu v_1 + (1-\mu).v_2}{\mu+1}}$$

Étude des différents cas limites...

- Si $m_1 = m_2$ $(\mu = 1)$ alors $v_1' = v_2$ et $v_2' = v_1$
- Si $m_1 >> m_2$ $(\mu \to \infty)$ alors $v_1' = v_1$ et $v_2' = 2v_1 - v_2$
- Si $m_1 << m_2$ $(\mu \to 0)$ alors $v_1' = 2v_2 - v_1$ et $v_2' = v_2$

7.3.2 Chocs à deux dimensions

On note :
- $\vec{v}_1^i$ le vecteur vitesse initiale de la boule 1
- v_{1t}^i la composante tangentielle de la vitesse initiale de la boule 1
- v_{1n}^i la composante normale de la vitesse initiale de la boule 1
- $\vec{v}_2^i$ le vecteur vitesse initiale de la boule 2
- v_{2t}^i la composante tangentielle de la vitesse initiale de la boule 2
- v_{2n}^i la composante normale de la vitesse initiale de la boule 2
- $\vec{v}_1^f$ le vecteur vitesse final de la boule 1
- v_{1t}^f la composante tangentielle de la vitesse finale de la boule 1
- v_{1n}^f la composante normale de la vitesse finale de la boule 1
- $\vec{v}_2^f$ le vecteur vitesse final de la boule 2
- v_{2t}^f la composante tangentielle de la vitesse finale de la boule 2
- v_{2n}^f la composante normale de la vitesse finale de la boule 2



Conservation de la quantité de mouvement

$$m_1\vec{v}_1^i + m_2\vec{v}_2^i = m_1\vec{v}_1^f + m_2\vec{v}_2^f \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} (1)\ m_1.v_{1t}^i + m_2.v_{2t}^i = m_1.v_{1t}^f + m_2.v_{2t}^f & (\text{Projection sur } \vec{e_T}) \\ (2)\ m_1.v_{1n}^i + m_2.v_{2n}^i = m_1.v_{1n}^f + m_2.v_{2n}^f & (\text{Projection sur } \vec{e_N}) \end{cases}$$

Conservation des composantes tangentielles de la quantité de mouvement

La seule force à considérer au cours du choc est une force de réaction, qui est toujours appliquée perpendiculairement au plan de contact des deux boules. Ainsi la vitesse tangentielle ne change pas : aucune force tangentielle n'est appliquée, donc aucune accélération tangentielle n'a lieu, donc les vitesses tangentielles ne sont pas modifiées !

$$\begin{cases} (3)\ m_1.v_{1t}^i = m_1.v_{1t}^f \\ (4)\ m_2.v_{2t}^i = m_2.v_{2t}^f \end{cases}$$

L'équation (1) devient inutile, car v_{1t}^f et v_{2t}^f ne sont plus des inconnues du problème.

Conservation de l'énergie cinétique (le choc est élastique)

$$(5) \qquad \frac{1}{2}m_1.{v_1^i}^2 + \frac{1}{2}m_2.{v_2^i}^2 = \frac{1}{2}m_1.{v_1^f}^2 + \frac{1}{2}m_2.{v_2^f}^2$$

Résolution du système d'équation

A présent, seules les équations (2) et (5) sont "utiles" pour la résolution du problème. Il y a deux inconnues v_{1n}^f et v_{2n}^f et il y a deux équations... Nous admettons la simplification suivante : $v_2^i = 0$ (soit $v_{2n}^i = 0$ et $v_{2t}^i = 0$). Cette simplification est équivalente à un changement de référentiel. On a la décomposition suivante : $\vec{v}_k^l = v_{kt}^l.\vec{e}_t + v_{kn}^l.\vec{e}_n$ où $k = 1, 2$ et $l = i, f$.

$$\begin{cases} (2)\ m_1.v_{1n}^i + m_2.v_{2n}^i = m_1.v_{1n}^f + m_2.v_{2n}^f \\ (5)\ \frac{1}{2}m_1.{v_1^i}^2 + \frac{1}{2}m_2.{v_2^i}^2 = \frac{1}{2}m_1.{v_1^f}^2 + \frac{1}{2}m_2.{v_2^f}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (2)\ m_1.v_{1n}^i = m_1.v_{1n}^f + m_2.v_{2n}^f \\ (5)\ \frac{1}{2}m_1.{v_1^i}^2 = \frac{1}{2}m_1.{v_1^f}^2 + \frac{1}{2}m_2.{v_2^f}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2)\ m_1.\left(v_{1n}^i - v_{1n}^f\right) = m_2.v_{2n}^f \\ (5)\ \frac{1}{2}m_1.({v_{1n}^i}^2 + \underbrace{{v_{1t}^i}^2}_{={v_{1t}^f}^2} - {v_{1n}^f}^2 - \underbrace{{v_{1t}^f}^2}_{={v_{1t}^i}^2}) = \frac{1}{2}m_2.({v_{2n}^f}^2 + \underbrace{{v_{2t}^f}^2}_{=0}) \end{cases} \qquad \begin{cases} (2)\ v_{2n}^f = \mu\left(v_{1n}^i - v_{1n}^f\right) \\ (5)\ \mu\left({v_{1n}^i}^2 - {v_{1n}^f}^2\right) = {v_{2n}^f}^2 \end{cases}$$

Remplaçons l'équation (2) dans (5) :

$$\begin{aligned}
\mu\left({v_{1n}^{i}}^{2}-{v_{1n}^{f}}^{2}\right) &= \mu^{2}\left(v_{1n}^{i}-v_{1n}^{f}\right)^{2}\\
{v_{1n}^{i}}^{2}-{v_{1n}^{f}}^{2} &= \mu.{v_{1n}^{i}}^{2}+\mu.{v_{1n}^{f}}^{2}-2\mu.v_{1n}^{i}.v_{1n}^{f}\\
{v_{1n}^{f}}^{2}.\left(\mu+1\right)-2\mu.v_{1n}^{i}.v_{1n}^{f}+{v_{1n}^{i}}^{2}.\left(\mu-1\right) &= 0
\end{aligned}$$

Il s'agit d'un polynôme linéaire du second ordre, où la variable est v_{1n}^{f}. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4\mu^{2}.{v_{1n}^{i}}^{2}-4.\left(\mu+1\right){v_{1n}^{i}}^{2}\left(\mu-1\right)\\
&= {v_{1n}^{i}}^{2}.\left[4\mu^{2}-4\left(\mu+1\right)\left(\mu-1\right)\right]\\
&= {v_{1n}^{i}}^{2}.\left[4\mu^{2}-4\left(\mu^{2}-1\right)\right]\\
&= 4.{v_{1n}^{i}}^{2}
\end{aligned}$$

Les solutions possibles sont donc :

$$v_{1n}^{f}=\frac{2\mu.v_{1n}^{i}\pm\sqrt{4.{v_{1n}^{i}}^{2}}}{2\left(\mu+1\right)}=\frac{2\mu.v_{1n}^{i}\pm|2.v_{1n}^{i}|}{2\left(\mu+1\right)}=\frac{2\mu.v_{1n}^{i}\pm2.v_{1n}^{i}}{2\left(\mu+1\right)}=\frac{\mu\pm1}{\mu+1}.v_{1n}^{i}$$

La solution $(+)$ donne simplement $v_{1n}^{f}=v_{1n}^{i}$, impliquant l'absence de choc ! Seule la solution (-) est à considérer :

$$\boxed{v_{1n}^{f}=\frac{\mu-1}{\mu+1}.v_{1n}^{i}} \qquad (6)$$

Remplaçons à présent l'équation (6) dans l'équation (2) :

$$v_{2n}^{f} = \mu\left(v_{1n}^{i}+\frac{1-\mu}{1+\mu}v_{1n}^{i}\right)=v_{1n}^{i}\left(\mu+\frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu}\right)=v_{1n}^{i}\left(\frac{\mu(1+\mu)+\mu(1-\mu)}{1+\mu}\right)=\frac{2\mu}{1+\mu}v_{1n}^{i}$$

$$\boxed{v_{2n}^{f}=\frac{2\mu}{1+\mu}v_{1n}^{i}}$$

En conclusion, il vient :

$$\begin{aligned}
v_{1n}^{f} &= \frac{\mu-1}{\mu+1}.v_{1n}^{i}\\
v_{2n}^{f} &= \frac{2\mu}{1+\mu}v_{1n}^{i}\\
v_{1t}^{f} &= v_{1t}^{i}\\
v_{2t}^{f} &= v_{2t}^{i}=0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\vec{v}_{1}^{f} &= v_{1n}^{f}.\vec{e_n}+v_{1t}^{f}.\vec{e_t}=\frac{\mu-1}{\mu+1}.v_{1n}^{i}.\vec{e_n}+v_{1t}^{i}.\vec{e_t}\\
\vec{v}_{2}^{f} &= v_{2n}^{f}.\vec{e_n}+v_{2t}^{f}.\vec{e_t}=\frac{2\mu}{1+\mu}v_{1n}^{i}.\vec{e_n}
\end{aligned}$$

Il est cependant plus agréable de connaitre les vitesses des boules avant et après le choc dans le référentiel du laboratoire $\{\vec{e_x},\vec{e_y}\}$. Pour cela, il suffit d'exprimer les vecteurs $\vec{e_n}$ et $\vec{e_t}$ selon les vecteurs $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$.
Nous avons :

$$\begin{aligned}
\vec{e_t} &= \cos\theta.\vec{e_x}+\sin\theta.\vec{e_y}\\
\vec{e_n} &= \sin\theta.\vec{e_x}-\cos\theta.\vec{e_y}\\
v_{1t}^{i} &= v_{1}^{i}\cos\theta\\
v_{1n}^{i} &= v_{1}^{i}\sin\theta\\
v_{2}^{i}=0 &\quad \text{et} \quad {v_{1x}}^{i}=v_{1}^{i}\\
\theta &= Acos\left(\frac{H}{2R}\right)
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{1}^{f} &= v_{1}^{i}.\left(\frac{\mu+\cos2\theta}{1+\mu}\right)\vec{e_x}+v_{1}^{i}.\left(\frac{\sin2\theta}{\mu+1}\right)\vec{e_y}\\
\vec{v}_{2}^{f} &= v_{1}^{i}.\left(\frac{\mu\left(1-\cos2\theta\right)}{\mu+1}\right)\vec{e_x}-v_{1}^{i}.\left(\frac{\mu.\sin2\theta}{\mu+1}\right)\vec{e_y}
\end{aligned}$$

Si $m_1=m_2$ $(\mu=1)$, il est facile de montrer que, dans ce cas, le produit scalaire $\vec{v}_{1}^{f}.\vec{v}_{2}^{f}$ est égal à zéro : quelque soit l'angle d'impact, les boules partent toujours à 90^{o} l'une de l'autre après un choc élastique.