I.1) تعريف متتالية:

تعريف :

نعتبر $I \subset IN$ ، المتتالية العددية هي كل تطبيق U من I نحو IN .

✷ مصطلحات:

- إذا كانت U متتالية فإننا نرمز ب U_n لصورة n عوض $U(n)$.
- نرمز للمتتالية U بالرمز $(U_n)_{n\in I}$.
- U_n يسمى الحد العام للمتتالية $(U_n)_{n\in I}$.
- إذا كا ن $I = IN$ عوض $(U_n)_{n\in IN}$ أو $(U_n)_{n\geq 0}$ نكتب فقط (U_n) .
- إذا كان $I = IN^*$ نكتب $(U_n)_{n\in IN^*}$ أو $(U_n)_{n\rangle 0}$ أو $(U_n)_{n\geq 1}$.
- إذا كان $I = \{n \in IN \;/\; n \geq n_0\}$ مع $n_0 \in IN$ فإ ن المتتالية u تكتب على شكل $(u_n)_{n\geq n_0}$.

✷ ملحوظة :

هناك عدة طرق لكتابة صيغة متتالية ، نذكر منها:

❶ كتابة صيغة المتتالية بدلالة n :

☜ **مثال:** 1) $U_n = 2n+1 \; ; n \in IN$ لدينا : $U_0 = 1 \; ; U_1 = 3 ; ....$

2) $U_n = \sqrt{n-3} \; ; n \geq 3$ لدينا : $U_3 = 0 ; \; U_4 = 1 ; ....$

❷ الكتابة الترجعية :

☜ **مثال:** 1) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{1+U_n} \; ; n \in IN \end{cases}$ لدينا : $U_1 = \dfrac{2}{1+3} = \dfrac{1}{2} ; U_2 = \dfrac{2}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3} ......$

2) $\begin{cases} U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \\ U_0 = U_1 = 1 \end{cases}$ لدينا : $U_2 = 1+1 = 2 ; U_3 = 2+1 = 3 ; .....$

I. 2) تساوي متتاليتين :

تعريف :

$$\forall n \in I \;, U_n = V_n \quad \Leftrightarrow \quad (U_n)_{n\in I} = (V_n)_{n\in I}$$

☜ **مثال:**

نعتبر المتتاليتين : $U_n = (-1)^n$ و $V_n = \cos(n.\pi)$ بين أ ن : $U_n = V_n$

I. 3) العمليات على المتتاليات :

$I \subset IN$ ، $(U_n)_{n\in I}$ و $(V_n)_{n\in I}$ متتاليتين عدديتين .

1) الجمع : $(U_n)_{n\in I} + (V_n)_{n\in I} = (U_n + V_n)_{n\in I}$

2) الضرب : $(U_n)_{n\in I} \times (V_n)_{n\in I} = (U_n \times V_n)_{n\in I}$

3) ضرب متتالية في عدد حقيقي : $\alpha \times (U_n)_{n\in I} = (\alpha \times U_n)_{n\in I}$

II) المتتالية المحدودة – المتتالية الرتيبة:

1.II) المتتالية المحدودة :

تعريف 1 :

$(U_n)_{n\in I}$ مكبورة $\Leftrightarrow \exists M \in IR \ / \forall n \in I ; U_n \leq M$ $\quad (I \subset IN)$

$(U_n)_{n\in I}$ مصغورة $\Leftrightarrow \exists m \in IR \ / \forall n \in I ; U_n \geq m$

مثال :

نعتبر المتتالية : $U_n = \dfrac{1}{n+1}$ من أجل $n \geq 0$ لدينا $U_n \geq 0$ إذن U_n مصغوة ب 0 .

و لدينا كذلك $n+1 \geq 1$ إذن $\dfrac{1}{n+1} \leq 1$ إذن $U_n \leq 1$ إذن U_n مكبورة ب 1 .

تعريف 2 :

$(U_n)_{n\in I}$ محدودة $\Leftrightarrow \exists (m,M) \in IR^2 \ / \forall n \in I ; m \leq U_n \leq M$ $\quad (I \subset IN)$

مثال :

1) نعتبر المتتالية : $U_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$; $n \in IN^*$

لدينا : $-2 \leq (-1)^n + \sin n \leq 2$ و $0 \leq \dfrac{1}{n^2} \leq 1$; $(\forall n \geq 1)$ إذن : $-2 \leq U_n \leq 2$

تمرين تطبيقي رقم 1:

1) نعتبر المتتالية : $U_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$; $n \in IN$

نعتبر الدالة : $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+5}$ (تزايدية على $[0,+\infty[$)

من جهة أخرى لدينا $f(0) = \dfrac{1}{5}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ إذن $\dfrac{1}{5} \leq U_n \leq 2$

2) نعتبر المتتالية : $\begin{cases} U_{n+1} = \sqrt{6+U_n} \\ U_0 = 0 \end{cases}$

نبين بالترجع أن $0 \leq U_n \leq 3$

لدينا : $0 \leq U_0 \leq 3$

نفترض أن : $0 \leq U_n \leq 3$

إذن : $6 \leq 6+U_n \leq 9$

إذن : $\sqrt{6} \leq \sqrt{6+U_n} \leq 3$ إذن : $0 \leq U_{n+1} \leq 3$ و بالتالي : $0 \leq U_n \leq 3$

2.II) المتتالية الرتيبة :

تعريف :

لتكن $(U_n)_{n\in I}$ متتالية عددية .

- المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تزايدية $\Leftrightarrow$ $U_n \leq U_{n+1}$ لكل n من I .
- المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تناقصية $\Leftrightarrow$ $U_{n+1} \leq U_n$ لكل n من I .
- المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ رتيبة $\Leftrightarrow$ تزايدية أو تناقصية .

✷ **ملحوظة :**

لدراسة رتابة متتالية نتبع إ حدى الطرق التالية :

1) نقارن U_n و U_{n+1} .

2) ندرس إ شارة $U_{n+1} - U_n$.

3) إ ذا كان $U_n \rangle 0$ نقارن $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1 .

4) إ ذا كانت $U_n = f(n)$ نستعمل رتابة f .

✷ **أ مثلة :**

1) نعتبر المتتالية : $\begin{cases} U_{n+1} = \sqrt{U_n} \\ U_0 = 16 \end{cases}$

نبين بالترجع أ ن : $0 \le U_{n+1} \le U_n$

من أ جل : $n = 0$ لدينا : $0 \le U_1 \le U_0$

نفترض أ ن : $0 \le U_{n+1} \le U_n$ صحيحة .

إ ذن : $0 \le \sqrt{U_{n+1}} \le \sqrt{U_n}$

إ ذن : $0 \le U_{n+2} \le U_{n+1}$

و بالتالي : $0 \le U_{n+1} \le U_n$ و منه المتتالية U_n تناقصية .

✍ **<u>تمرين تطبيقي رقم 2:</u>**

1) نعتبر المتتالية : $U_n = 2n + \sin n$.

لدينا : $U_{n+1} - U_n = 2(n+1) + \sin(n+1) - 2n - \sin n = 2 + \sin(n+1) - \sin n$.

و من جهة أ خرى لدينا : $-1 \le \sin(n+1) \le 1$ و $-1 \le -\sin n \le 1$ إ ذن :

$$-2 \le \sin(n+1) - \sin n \le 2$$

و بالتالي : $U_{n+1} - U_n \ge 0$. و منه المتتالية U_n تزايدية .

2) نعتبر المتتالية : $U_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 5}$.

لدينا : $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 5}$ معرفة على $[0, +\infty[$.

لدينا : $f'(x) = \frac{18x}{(x^2+5)^2} \rangle 0$.

و بالتالي المتتالية U_n تزايدية .

III) <u>المتتالية الحسابية – المتتالية الهندسية :</u>

1.III) <u>المتتالية الحسابية :</u>

تعريف :

تكون متتالية $(U_n)_{n \ge n_0}$ حسابية إ ذا وجد عدد حقيقي r بحيث $U_{n+1} = U_n + r$ لكل $n \ge n_0$ العدد r يسمى أ ساس المتتالية .

مثال :

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة ب : $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 3 \\ U_0 = 2 \end{cases}$

خاصية مميزة 1:

(U_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $\frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2} = U_n$ لكل $n \geq 1$

تمرين تطبيقي رقم 3:

$u_1 ; u_2 ; u_3$ ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية حل في IR : $u_1.x^2 + u_2.x + u_3 = 0$

خاصية 2:

إذا كانت $(U_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية فإنه لكل عدد p بحيث $n_0 \leq p \leq n$ لدينا
$U_n = U_p + (n-p)r$

حالة خاصة :

إذا كان $p = 0$ فإن $U_n = U_0 + nr$

1.1.III) رتابة متتالية حسابية :

مبرهنة1 :

لتكن $(U_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r لدينا $U_{n+1} = U_n + r$ إذن $U_{n+1} - U_n = r$ و منه :
- إذا كان $r \rangle 0$ فإن (U_n) تزايدية .
- إذا كان $r = 0$ فإن (U_n) ثابتة .
- إذا كان $r \langle 0$ فإن (U_n) تناقصية .

2.1.III_)مجموع عدة حدود متتابعة:

مبرهنة 2:

نعتبر $S = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + ... + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$ مجموع $n-p+1$ حد متتابعة لمتتالية

حسابية (U_n) .

لدينا إ
$$S = \frac{(U_p + U_n) \times (n-p+1)}{2} = \frac{\text{مجموع الحدود} \times (\text{الحد الأول+الحدالأخير})}{2}$$

حالات خاصة :

- إذا كان $p = 1$ فإن $S = \frac{(U_1 + U_n) \times (n)}{2}$
- إذا كان $p = 0$ فإن $S = \frac{(U_0 + U_n) \times (n+1)}{2}$

مثال :

نعتبر المتتالية السابقة : $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 3 \\ U_0 = 2 \end{cases}$ أحسب المجاميع بدلالة n التالية :

$U_0 + U_1 + \dots\dots + U_n$ ، $U_1 + U_2 + \dots\dots + U_n$ ، $U_5 + U_6 + \dots\dots + U_n$

تمرين تطبيقي رقم 4:

لتكن (U_n) متتالية حسابية و $S_n = U_1 + U_2 + \dots\dots + U_n$

1) نعتبر $U_1 = 5$ و $r = 3$ و $n = 20$ أحسب U_n و S_n .

2) نعتبر $U_n = -62$ و $r = -7$ و $S_n = 168$ أحسب n و U_1 .

2.III) المتتالية الهندسية :

تعريف :

تكون متتالية $(U_n)_{n \geq n_0}$ هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث $U_{n+1} = q \times U_n$ لكل $n \geq n_0$

مثال :

نعتبر المتتالية : $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{2} \times U_n \\ U_0 = 3 \end{cases}$

خاصية مميزة 1:

(U_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $U_{n-1} \times U_{n+1} = {U_n}^2$ لكل $n \geq 1$

تمرين تطبيقي رقم 5:

a_1 ; a_2 ; a_3 ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية بحيث $a_1 + a_2 + a_3 = 30$
و $a_2 - 5 \, ; a_2 \, ; a_3$ هي ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية .
حدد a_1 ; a_2 ; a_3

خاصية 2:

إذا كانت $(U_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية فإنه لكل عدد p بحيث $n_0 \leq p \leq n$ لدينا $U_n = U_p \times q^{n-p}$

حالة خاصة :

إذا كان $p = 0$ فإن $U_n = U_0 \times q^n$ إذا كان $p = 1$ فإن $U_n = U_1 \times q^{n-1}$

تمرين تطبيقي رقم 6:

لتكن (U_n) متتالية هندسية حدها الأول $U_0 = \frac{1}{2}$ و أساسها $q = 2$.

أحسب U_4 و U_8

III.2 .1)رتابة متتالية هندسية في حالة $q \rangle 0$:

مبرهنة 1:

لتكن $(U_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها $q \rangle 0$ لدينا $U_{n+1} - U_n = U_0 \times q^n (q-1)$ و منه :

- إذا كان : $q \rangle 1$ فإن $U_{n+1} - U_n \rangle 0$ إذن $(U_n)_{n\geq n_0}$ تزايدية .
- إذا كان : $q \langle 1$ فإن $U_{n+1} - U_n \langle 0$ إذن $(U_n)_{n\geq n_0}$ تناقصية .
- إذا كان : $q = 1$ فإن $U_{n+1} - U_n = 0$ إذن $(U_n)_{n\geq n_0}$ ثابثة .

III.2 .2)مجموع عدة حدود متتابعة :

مبرهنة 2:

نعتبر $S = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + ... + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$ مجموع $n-p+1$ حد متتابعة لمتتالية هندسية . لدينا : $S = U_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

☝ حالة خاصة:

- إذا كان $p = 1$ فإن $S = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$
- إذا كان $p = 0$ فإن $S = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

✍ تمرين تطبيقي رقم 7:

نعتبر المتتاليتين (U_n) و (V_n) المعرفتين لكل n من IN بما يلي :

$$U_n = \frac{3\times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{و} \quad V_n = \frac{3\times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1) لتكن (W_n) المتتالية المعرفة بما يلي : $W_n = U_n + V_n$ بين أ ن (W_n) متتالية هندسية .
2) لتكن (T_n) المتتالية المعرفة بما يلي : $T_n = U_n - V_n$ بين أ ن (T_n) متتالية حسابية .
3) عبر عن المجموع التالي بدلالة n : $S_n = U_0 + U_1 + ...U_n$