Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

التمرين رقم 1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x) = x^3 + x^2 - x$ و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم.

1 ـ أحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x$.

2 ـ أ ـ أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند العدد **1** .

ب ـ حدد الدالة التألفية المماسة للدالة f بجوار **1** ثم إعط تقريبا للعدد $f(1,001)$.

3 ـ أ ـ أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند -1 .

ب ـ حدد معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة التي أفصولها -1.

4 ـ أ ـ أحسب $f'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

ب ـ ضع جدول تغييرات الدالة f .

5 ـ حدد نقط تقاطع (C_f) و محوري المعلم .

6 ـ حل المعادلة $x^3 + x^2 - x - m = 0$ حسب قيم البرامتر m. (يمكن إستعمال جدول التغييرات)

تصحيح التمرين رقم 1 :

1 ـ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 + x^2 - x = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 + x^2 - x = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2-x}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 + x - 1 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim_{x\to-\infty} x^3 + x^2 - x + x = \lim_{x\to-\infty} x^3 + x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

2 ـ أ ـ $$\lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2+2x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1} x^2 + 2x + 1 = 4$$

(إستعمال القسمة الأقليدية لـ $x^3 + x^2 - x - 1$ على $x - 1$)

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق في العدد 1

ب ـ **الدالة التألفية المماسة للدالة f بجوار 1 تكتب على الشكل : $g(x) = f'(1)(x-1) + f(1)$

$g(x) = 4(x-1) + 1$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

** تقريب للعدد $f(1,001)$.

لدينا : $f(x) \approx 4(x-1)+1$. نضع $h = x - 1$ نحصل على $f(1+h) \approx 4h + 1$

و منه $f(1,001) \approx 4\times0,001 + 1 = 0,004 + 1 = 1,004$ لأن قيمة h هي $0,001$.

3 ـ أ ـ $$\lim_{x\to-1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(x^2-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1} x^2 - 1 = 0$$

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق في العدد -1 .

ب ـ بما أن الدالة f قابلة للإشتقاق في العدد -1 فإن (C_f) يقبل مماسا في النقطة التي أفصولها -1 معادلته :

$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ يعني $y = 1$.

4 ـ أ ـ لنحسب $f'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left(x^3 + x^2 - x\right)' = 3x^2 + 2x - 1$$

ب ـ لوضع جدول التغييرات ندرس إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا : $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

نحسب مميزثلاثية الحدود $3x^2 + 2x - 1$ نحصل على : $\Delta = 2^2 - 4\times3\times(-1) = 16$

إذن المعادلة $3x^2 + 2x - 1 = 0$ تقبل حلين مختلفين : $x_1 = \frac{-2+\sqrt{16}}{6} = \frac{1}{3}$ و $x_2 = \frac{-2-\sqrt{16}}{6} = -1$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{-5}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

5 ـ ** لنحدد نقط تقاطع (C_f) و محور الأراتيب .

لدينا : $f(0)=0$ إذن (C_f) يقطع محور الأراتيب في النقطة $O(0,0)$.

** لنحدد نقط تقاطع (C_f) و محور الأفاصيل .

لذلك نحل المعادلة $f(x)=0$.

لدينا : $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x^2+x-1)=0$

$x^2+x-1=0$ أو $x=0$ لنحل المعادلة $x^2+x-1=0$.

لدينا : $\Delta=1^2-4\times1\times(-1)=5$ ومنه المعادلة تقبل حلين مختلفين : $x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ و $x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

إذن (C_f) يقطع محور الأراتيب في النقطة $O(0,0)$ و $A(x_1,0)$ و $B(x_2,0)$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

6 ـ لنحل المعادلة $x^3+x^2-x-m=0$ حسب قيم البرامتر m

لدينا : $x^3+x^2-x-m=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-x=m \Leftrightarrow f(x)=m$

لحل المعادلة $f(x)=m$ ندرس تقاطع (C_f) و المستقيم الأفقي (Δ) الذي معادلته $y=m$.

إنطلاقا من جدول تغييرات الدالة f نلاحظ أن :

** إذا كان $m<\frac{-5}{27}$ أو $m>1$ فإن (C_f) يقطع (Δ) في نقطة واحدة .

إذن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا إذا كانت m تنتمي إلى $\left]-\infty,\frac{-5}{27}\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

** إذا كان $m=1$ أو $m=\frac{-5}{27}$ فإن (C_f) يقطع (Δ) في نقطتين .

إذن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين مختلفين إذا كان $m=1$ أو $m=\frac{-5}{27}$.

** إذا كان $\frac{-5}{27}<m<1$ فإن (C_f) يقطع (Δ) في ثلاث نقط .

إذن المعادلة $f(x)=m$ تقبل ثلاث حلول إذا كان m تنتمي إلى $\left]\frac{-5}{27},1\right[$.

التمرين رقم 2 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم.

1 ـ أ ـ حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب ـ أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$.

2 ـ أ ـ أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند العدد 0 .

ب ـ حدد الدالة التألفية المماسة للدالة f بجوار 0 ثم إعط تقريبا للعدد $f(-5.10^{-2})$.

3 ـ أ ـ أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 2 .

ب ـ حدد معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة التي أفصولها 2 .

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

4 ـ أ ـ أحسب $f'(x)$ لكل $x \in D_f$.

ب ـ ضع جدول تغييرات الدالة f .

5 ـ حدد نقط تقاطع (C_f) و محوري المعلم .

تصحيح التمرين رقم 2 :

1 ـ أ ـ لنحدد D_f.

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ و } x \neq -1$$

إذن : $D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$

ب ـ ** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

** $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+x}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

** $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2+x}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

** $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x\to-1^-} \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to-1^-} \frac{x}{(x-1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

** $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x\to-1^+} \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to-1^+} \frac{x}{(x-1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

2 ـ أ ـ لندرس قابلية إشتقاق الدالة f عند العدد 0 .

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{x^2+x}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{x^2+x}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to0} \frac{x+1}{x^2-1} = -1 .$$

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 .

ب ـ الدالة التألیفیة المماسة للدالة f بجوار 0 تكتب على الشكل : $g(x) = f'(0)(x-0) + f(0)$ يعني $g(x) = -x$

تقريب للعدد $f(-5.10^{-2})$.

بما ان $g(x) = -x$ هي الدالة التأليفية المماسة للدالة f بجوار 0 فإن $f(x) \approx -x$

ومنه : $f(-5.10^{-2}) \approx -5.10^{-2}$.

3 ـ أ ـ لندرس قابلية إشتقاق الدالة f عند العدد 2 .

$$\lim_{x\to2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{\frac{x^2+x}{x^2-1} - 2}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{\frac{x^2+x}{x^2-1} - 2\frac{x^2-1}{x^2-1}}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{\frac{x^2+x-2x^2+2}{x^2-1}}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{-x^2+x+2}{(x-2)(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{-(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2-1)} = \lim_{x\to2} \frac{-(x+1)}{(x^2-1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق عند 2 .

ب ـ لحدد معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة التي أفصولها 2 .

(C_f) يقبل مماسا في النقطة التي أفصولها 2 معادلته : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ يعني $y = -1(x-2) + 2$

ومنه معادلة المماس هي : $y = -x + 4$.

4 ـ أ ـ لدينا : $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-1}$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+x}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2+x)'(x^2-1) - (x^2+x)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{(2x+1)(x^2-1) - 2x(x^2+x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x^3-2x+x^2-1-2x^3-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-2x-1}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+2x+1}{(x^2-1)^2} = -\frac{(x+1)^2}{(x^2-1)^2}$$

ب ـ لدينا : $f'(x) = -\frac{(x+1)^2}{(x^2-1)^2} < 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$ $-$	$\|\|$ $-$	
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	$\|\|$ $+\infty \searrow -\infty$	$\|\|$ $+\infty \searrow 1$	

5 ـ ** لنحدد نقط تقاطع (C_f) و محور الأراتيب .

لدينا : $f(0)=0$ إذن (C_f) يقطع محور الأراتيب في النقطة $O(0,0)$.

** لنحدد نقط تقاطع (C_f) و محور الأفاصيل .

لذلك نحل المعادلة $f(x)=0$.

لدينا : $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0$

يعني $x=0$ أو $x=-1$

إذن (C_f) يقطع محور الأراتيب في النقطة $O(0,0)$ و $A(-1,0)$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

التمرين رقم 3 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} & x < 1 \end{cases}$ **و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم.**

1 ـ أحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2 ـ أ ـ أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند العدد 1 .

ب ـ أول النتيجة هندسيا .

3 ـ أ ـ أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 .

ب ـ حدد معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة التي أفصولها 0.

4 ـ أ ـ أحسب $f'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

ب ـ ضع جدول تغييرات الدالة f .

تصحيح التمرين رقم 3 :

1 ـ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x-1} = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

2 ـ أ ـ لندرس قابلية إشتقاق الدالة f عند العدد 1 . لدينا $f(1)=0$.

* $\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{x\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ و نقول إن f غير قابلة للإشتقاق على يمين 1 .

* $\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-1}{(x^2+1)(x-1)} = \lim_{x\to1^-} \frac{x+1}{(x^2+1)} = \frac{2}{2} = 1$ و نقول إن f قابلة للإشتقاق على يسار 1 .

ب ـ التأويل الهندسي :

* بما أن $\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$ فإن (C_f) يقبل نصف مماس عمودي معادلته $x=1$ موجه نحو الأعلى .

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

* بما أن $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$ فإن (C_f) يقبل نصف مماس معادلته $y=f'(x)(x-1)+f(1)$ أي $y=x-1$.

3 ـ أ ـ لندرس قابلية إشتقاق الدالة f عند العدد 0 . لدينا $f(0)=-1$.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}+1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2-1+x^2+1}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-1+x^2+1}{x\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)}=0$$

و نقول إن f قابلة للإشتقاق عند 0 .

ب ـ بما ان $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ فإن (C_f) يقبل مماسا أفقيا في النقطة التي أفصولها 0 معادلته : $y=0$.

4 ـ أ ـ لدينا
$$\begin{cases} f(x)=x\sqrt{x-1} & x\ge1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1} & x<1 \end{cases}$$

** ليكن $x\in\left]1,+\infty\right[$. $f(x)=x\sqrt{x-1}$

$$f'(x)=\left(x\sqrt{x-1}\right)'=1\times\sqrt{x-1}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^2+x}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2(x-1)+x}{2\sqrt{x-1}}=\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}=0\Leftrightarrow3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

ومنه $f'(x)>0$ في المجال $\left]1,+\infty\right[$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

** ليكن $x\in\left]-\infty,1\right[$. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow4x=0\Leftrightarrow x=0$$

ومنه $f'(x)\ge0$ في المجال $\left[0,1\right[$ و $f'(x)\le0$ في المجال $\left]-\infty,0\right]$.

ب ـ ضع جدول تغييرات الدالة f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr