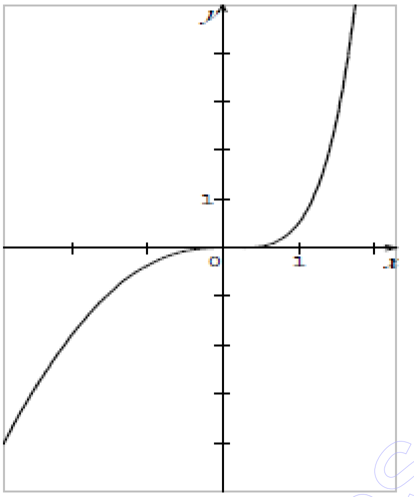
تمرين مع الحل:

نعتبر الدالة f المعرفة على R بــ : $f(x)=x^2e^{x-1}-\frac{x^2}{2}$ و (C_f) تمثيلها البياني



بملاحظة هذا الشكل، ما هو تخمينك حول :

a) اتجاه تغير الدالة f

b) وضعية (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل؟

الجزء الأول :

1) احسب $f'(x)$.

2) لتكن g الدالة المعرفة على R بــ : $g(x)=(x+2)e^{x-1}-1$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و ادرس تغيرات g .

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α . بين أن $0,20<\alpha<0,21$

4) استنتج تغيرات f .

ماذا يمكن القول عن تخمينك الأول ؟

الجزء الثاني :

1) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

2) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ : $h(x)=\dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.

a) أحسب $h'(x)$ ثم ادرس تغيرات h على $[0;1]$.

b) استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

3) a) عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

b) عين وضعية (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .

ماذا يمكن القول عن تخمينك الثاني ؟

الحل:

بملاحظة الشكل الذي يظهر على شاشة الحاسبة البيانية ، يمكن القول أن :

a) الدالة f متزايدة على المجال $[-3;2]$.

b) لما $x<0$ ، يكون $\left(C_f\right)$ تحت محور الفواصل

و لما $x>0$ ، يكون $\left(C_f\right)$ فوق محور الفواصل .

الجزء الأول :

1) f قابلة الإشتقاق على R (مجموع و جداء دوال قابلة الإشتقاق) و مهما كان x من R :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x \\ &= x\left[e^{x-1}(x+2)-1\right] \end{aligned}$$

2) $g(x)=(x+2)e^{x-1}-1$.

◄ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ لأن : $\begin{cases} x+2\to+\infty \\ x-1\to+\infty \\ e^{x-1}\to+\infty \end{cases}$

◄ $$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty} e^{x-1}(x-1+3)-1 \\ &= \lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{x-1}+3e^{x-1}-1 \\ &= -1 \end{aligned}$$ لأن $\begin{cases} x-1\to-\infty \\ e^{x-1}\to 0 \\ (x-1)e^{x-1}\to 0 \end{cases}$

g قابلة الإشتقاق على R و $$\begin{aligned} g'(x) &= e^{x-1}+(x+2)e^{x-1} \\ &= (x+3)e^{x-1} \end{aligned}$$

$g'(x)$ له إشارة $x+3$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-1	↘	$-e^{-1}-1$	↗	$+\infty$

3) من جدول تغيرات g نرى أن : على المجال $]-\infty;-3]$ g سالبة تماما .

على المجال $[-3;+\infty[$: g مستمرة و متزايدة تماما من $\left(-e^{-1}-1\right)$ إلى $+\infty$. ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.

بما أن $g(0,20)\approx -0,01<0$ و $g(0,21)\approx 0,003>0$ فإن $0,20<\alpha<0,21$

4) حسب ما سبق : $g(x)<0$ لما $x\in\,]-\infty;\alpha[$ و $g(x)>0$ لما $x\in\,]\alpha;+\infty[$.

بما أن $f'(x)=x.g(x)$ ، نستنتج تغيرات f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	0	↘	$f(\alpha)$	↗	

هذا يبين لنا أن التخمين الأول خاطئا .

الجزء الثاني :

1) $g(\alpha)=0$ يعني $(\alpha+2)e^{\alpha-1}-1=0$ أي $(\alpha\neq-2)$ $e^{\alpha-1}=\dfrac{1}{\alpha+2}$

منه $$f(\alpha)=\alpha^2e^{\alpha-1}-\frac{\alpha^2}{2}=\frac{\alpha^2}{\alpha-2}-\frac{\alpha^2}{2}=\frac{-\alpha^3}{2(\alpha-2)}$$

2) $h(x)=\dfrac{-x^3}{2(x+2)}$. a) h قابلة الإشتقاق على $[0;1]$ و :

$$h'(x)=-\frac{3x^2(x+2)-x^3}{2(x+2)^2}=-\frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

مهما كان x من المجال $[0;1]$: $h'(x)<0$ و منه h متناقصة تماما على $[0;1]$.

b) نلاحظ أن $f(\alpha)=h(\alpha)$.

لدينا $0,20<\alpha<0,21$ و منه $h(0,21)<h(\alpha)<h(0,20)$ (h متناقصة)

و بالتالي $-0,00209<f(\alpha)<-0,00182$

3) a) $f(x)=0$ يعني $x^2\left(e^{x-1}-\dfrac{1}{2}\right)=0$

أي $x^2=0$ أو $e^{x-1}-\dfrac{1}{2}=0$

أي $x=0$ أو $e^{x-1}=\dfrac{1}{2}$

أي $x=0$ أو $x-1=\ln\dfrac{1}{2}$

أي $x=0$ أو $x=1-\ln 2$

$\left(C_f\right)$ يقطع محور الفواصل عند نقطتين فاصلتهما 0 و $1-\ln 2$.

b) دراسة إشارة $f(x)$:

* $f(x)=0$ لما $x=0$ أو $x=1-\ln 2$

* $f(x)>0$ يعني $e^{x-1}-\frac{1}{2}>0$ أي $x-1>\ln\frac{1}{2}$

أي $x>1-\ln 2$

إذن لما $x\in\left]-\infty;1-\ln 2\right[$ فإن $\left(C_f\right)$ يكون تحت محور الفواصل .

و لما $x\in\left]1-\ln 2;+\infty\right[$ فإن $\left(C_f\right)$ يكون فوق محور الفواصل .

هذا يبين لنا أن التخمين الثاني كذالك خاطئا . هذا راجع إلى أن سلّم الوحدات الذي تستعمله الحاسبة البيانية كبير جدا بالنسبة لقيمة $f(\alpha)$ التي لا تظهر على الشاشة .